DOI: http://dx.doi.org/10.33948/sjes-ksu-3-21-5

تصورات مشرفات الرياضيات ومعلماتها نحو فلسفة البساطة والجمال في المعرفة الرياضية: دراسة نوعية

أ. عهود بنت أحمد الشريف[1] أ.د. محمد بن عبد الله النذير[2]

(قدم للنشر 1446/11/29هـ -وقبل 15 /01/ 1447هـ)

المستخلص: هدف البحث إلى الكشف عن تصوُّرات مشرفات ومعلمات الرياضيات نحو البساطة والجمال في المعرفة الرياضية، وانعكاسها في ممارساتهن الأدائية. ولتحقيق ذلك: استخدم البحث المنهج النوعي الأساس، حيث تم اختيار عينة قصدية معيارية ، شملت ثلاث مشرفات وخمس معلمات ممن يدرّسن الرياضيات بالمرحلة الثانوية في إدارة تعليم الخرج، من خلال مقابلات شبه منظّمة، تم تحليلها باستخدام التحليل الموضوعي، وقد أسفرت عملية التحليل عن تصنيف تصوُّرات مشرفات ومعلمات الرياضيات نحو البساطة والجمال في ثلاثة موضوعات رئيسة، هي: أولاً: البساطة والجمال في المعرفة الرياضية، وثانيًا: أبعاد البساطة والجمال في النماذج الرياضية، وثالثًا: انعكاس البساطة والجمال في المعرفة الرياضية على الممارسات التدريسية والإشرافية. وكشفت النتائج عن تفاوت في عمق تصوُّرات المشاركات لمفهومي البساطة والجمال، وقد انعكس هذا المستوى من التصور على طبيعة الممارسات التدريسية والإشرافية، حيث ركَّزت المعلمات على الجوانب الإجرائية مقابل ممارسات إشرافية أظهرت فهمًا أعمق لدى المشرفات. ويُوصي البحث بتقديم برامج تدريبية وتصميم أنشطة تعليمية تُبرز مفهومي البساطة والجمال في سياق المعرفة الرياضية.

الكلمات المفتاحية: معلمات الرياضيات - المرحلة الثانوية – الرمزية الرياضية – البرهان الرياضي – البنى الرياضية -الممارسات التدريسية.

Mathematics supervisors and teachers' perceptions of the philosophy of simplicity and beauty in mathematical knowledge: (A qualitative study)

Ahoud A. Alsharif[1] Mohammed A. Alnatheer[2]

(Submitted 27-05-2025 and Accepted on 10-07-2025)

Abstract: The research aimed to reveal the perceptions of mathematics supervisors and teachers of simplicity and beauty in mathematical knowledge, and their reflection in their performance practices. To achieve this, the research used a basic qualitative approach. A standard intentional sample was selected, including three supervisors and five teachers in the Al-Kharj Education Department. Semi-structured interviews were conducted and were analyzed using thematic analysis which resulted in classifying the perceptions of mathematics supervisors and teachers of simplicity and beauty into three themes: First, simplicity and beauty in mathematical knowledge; Second, the dimensions of simplicity and beauty in mathematical models; and Third, the reflection of simplicity and beauty in mathematical knowledge. The results revealed variations in the depth of the participants' perceptions of the concepts of simplicity and beauty, as the teachers focused on procedural aspects, while supervisory practices demonstrated a deeper understanding among the supervisors. The research recommends providing training programs and designing educational activities that highlight the concepts of simplicity and beauty in the context of mathematical knowledge.

Keywords: Mathematics Teachers- Secondary Stage- Mathematical Symbolism- Mathematical Proof- Mathematical Structures- Teaching Practices.

---

(1) ، (2) كلية التربية - جامعة الملك سعود

E -mail: m_alnatheer@yahoo.com

(1), (2) College of Education - King Saud University

E-mail: Ohud1438@gmail.com

مقدّمة

تُعــدُّ الرياضــيات إحــدى أعظــم الإنجــازات الإنسـانية؛ إذ تمثِّل نظامًا فكريًا متكاملًا، يجمع بين المنطق والإبداع، فهي ليست مجرد أداة لحلّ المشكلات أو تنظيم البيانات، بل تُسهم في فهم العالم الحقيقي عبر التعبير عن الأفكار والمفاهيم العميقة بلغة دقيقة ومجرَّدة، مما يجعلها علمًا عالميًا، يتجاوز الثقافات واللغات.

وتتجسَّد المعرفة الرياضية في فهم البنى الرياضية والمفاهيم والعلاقات بينها، فهي ليست مجرد مجموعة من التعميمات، بل هي إطار شمولي للتفكير (Ben-Motreb, 2010)، وتتميز الرياضيات بطبيعتها الفطرية البدهية الموضوعية التي تُثير البحث، وتُحفِّز الفضـول، وتُعنى بدراسـة الأنمـاط والعلاقـات، ممـا يجعلها لغة كونية دقيقة، تُعبّر عن المفاهيم بوضوح واختزال، فهي علم يتميز بالطابع التحليلي، والتركيبي، والشكلي، والاستدلالي (النذير،2020).

وعلى الرغم من هذا العمق الفكري فغالبًا ما تُعدّ الرياضيات مجردة وخالية من القيمة الجمالية، مما قـد يقلـل مـن إدراك جماليتهـا، ومـع ذلـك فـإن النظـر إليهـا مـن منظـور جمـالي يكشـف عـن جمـال متأصّل، يتجلّى في أنماطها الهندسية المتقنة، وتراكيبها البديعة، والمربعات السحرية ذات الروابط العجيبة، وتُبرز هـذه الجوانـب التناسـق والتنـاغم، ممـا يجعـل الرياضيات لغة فريدة للجمال، تتجاوز ما هو مرئي أو حسّي (Larcombe, 2018).

ويرتبط الجمال الرياضي بالمفاهيم الفلسفية التي تنظر إلى البساطة والتناسق كسمات للجمال، ويتجلّى ذلك في تصور أفلاطون للجمال؛ بوصفه مظهرًا من مظاهر التناسب والتناغم بين الأجزاء، حيث يُدرك الجمال عقليًا عبر النظام والاتساق، وتُعدّ هذه الرؤية أساسًا فلسفيًا لمفاهيم الجمال في الرياضيات، وقد عُدّت هذه النظرة الأفلاطونية رؤية رفيعة للجمال، تتجاوز الإدراك الحسي إلى إدراك عقلي يرتبط بجمال تجريدي للبنية الرياضية (Lloyd, 2010).

وعبر التاريخ انعكست الرؤية الفلسفية للجمال كقيمة معرفية على تطور الرياضيات، حيث تحولت البساطة والجمال من مجرد تفضيلات جمالية إلى منهجيات أساسية، أسهمت في تطوير نظريات رياضية تميّزت بالعمق والاتساق، ففي العصور السابقة قدّم إقليدس في كتابه *"العناصر"* نظامًا هندسيًا متكاملًا، وطوّر نيوتن حساب التفاضل والتكامل؛ لفهم الحركة والتغير، أما في العصور الحديثة فقد أسهمت المناهج المنطقية لفريجة وراسل في تعزيز بساطة الرياضيات وتكاملها عبر تقديم إطار موحَّد لدراستها (Youvan, 2024).

وفي امتداد الرؤية الفلسفية للجمال؛ قدّم هنري بوانكاريه (Henri Poincaré) تعريفًا فريدًا للجمال الرياضي؛ بوصفه شعورًا جماليًا حقيقيًا، يعترف به جميع علماء الرياضيات الحقيقيين، حيث يرى أن الجمال ينبع من قيمتي البساطة والوحدة؛ إذ تُعبِّر البساطة عن التناسق الفكري، بينما تُبرز الوحدة قدرة النظرية على دمج الحقائق المختلفة في بنية متكاملة (Poincaré, 1905; Ivanova, 2020) . أما برتراند راسل فقد وصف الجمال الرياضي بأنه "صارم ونقي"، لا يُشبه الزخارف الحسية، بل ينبع من الترابط الفكري والمنطقي بين الأفكار، مما يجعل الرياضيات فنًا عقليًا يتجاوز الظواهر الحسية نحو الكمال الفكري.(Russell, 1918)

ويمثّل الجمال في الرياضيات مفهومًا متعدد الأبعاد، يتجاوز البعد الفلسفي، ويظهر هذا الجمال في البنية الشكلية المتماسكة للرياضيات، وفي أنماطها التي تُبرز التناسق والتناغم، مما يمنحها بُعدًا جماليًا فريدًا، ويُبرز قدرتها على توحيد المفاهيم ضمن بنية متكاملة (عبدالهادي، 2014؛ النذير، 2020؛ Breitenbach & Rizza, 2018).

ويمكن تحليل الجمال الرياضي عبر ثلاثة محاور رئيسة متكاملة، تشكّل إطارًا شاملًا لفهمه؛ إذ يتمثّل البُعد البنيوي في جمال الهياكل والبنى الرياضية، مثل: الأنماط الهندسية والأعداد، التي تتسم بالتناظر والتناغم، أما البُعد النظري فيُبرز جمال النظريات الرياضية عبر تماسكها المنطقي، وقدرتها على كشف العلاقات المنظّمة بين المفاهيم، ويظهر البُعد الإجرائي في جمال البراهين الرياضية التي تتسم بالرشاقة والبساطة، مع تقديم حلول مختصرة ومنطقية، تعكس الإبداع الفكري والتناسق المنهجي، وتُبرز هذه الأبعاد الجمال الرياضي كقيمة فكرية وتنظيمية في الرياضيات (Jevtić, Kostić & Maksimović, 2024).

وتمثِّل البساطة مفهومًا نسبيًا في الرياضيات، يعتمد على خبرات الأفراد، حيث تُسهم في تعزيز الفهم وإضفاء جمال رياضي خاص (محمد، 2007). ومن منظور فلسفي يرى كارل بوبر أن البساطة معيار علمي أساس؛ فهي تجعل النظرية أكثر قابلية للدحض والتفنيد، ومن ثمّ أكثر قوة، ويدعم مبدأ شفرة أوكام هذه الرؤية؛ إذ يرى الفيلسوف "ويليام الأوكامي" أن التحليل الأبسط غالبًا ما يكون الأنسب لحلّ المشكلات المعقّدة، وقد تجلّى ذلك في الرياضيات عبر تميز الهندسة الإقليدية ببساطتها مقارنة بغيرها، مما منحها مكانة بارزة (النذير، 2020).

وتشير دراسة برينكمان (Brinkmann, 2000) إلى أن الجمال الرياضي يتحقّق عبر تحقيق توازن بين البساطة ودرجة التعقيد. وتؤكّد دراسة ساتيام (Satyam, 2016) أن هذا الجمال يتجسّد في التفاعل الديناميكي بين هذين العنصرين، مع التركيز على عنصر المفاجأة كجزء محوري في تقدير الجمال؛ إذ يؤدي الكشف عن علاقات خفية أو حلول غير متوقعة إلى تعزيز الإدراك الجمالي، وهو ما يمكن تحقيقه عبر أنشطة تعليمية تُدمج فيها هذه العناصر، مثل طرح مسائل غير روتينية أو تقديم براهين تؤدي إلى نتائج غير مألوفة.

وفي دراسة كويتشو وكاتز وبيرمان (Koichu, Katz, & Berman, 2017)، وُجد أن المشكلات الرياضية ذات الحلول المفاجئة أكثر جمالًا، حيث تحقّق هذا التنبُّؤ لدى (90%) من طلاب المرحلة المتوسطة، مما يشير إلى ارتباط الجمال الرياضي بعامل المفاجأة. فيما بيّنت دراسة برينكمان (Brinkmann, 2009) أن التقديرات الجمالية تتأثر بأهمية المشكلة، وتطبيقاتها الواقعية، والثقة بالحلّ، وأن الجمع بين البساطة والتعقيد يعزّز التفكير ويمنح المسألة بُعدًا جماليًا مميزًا.

ويمتد تأثير الجمال الرياضي إلى الأبعاد الاجتماعية والثقافية؛ فقد أوضحت دراسة ويلز (Wells, 1990) أن تقييمه يتأثّر بعوامل مثل: شهرة المصدر وارتباط النظرية بالمفاهيم المألوفة. وأشارت دراسة إنغليس وأبردين (Inglis & Aberdein, 2015) إلى أن التعرّض المتكرر للنظريات يُسهم في تشكيل الأحكام الجمالية. بينما تضيف السياقات الثقافية والتاريخية بُعدًا إضافيًا للجمال الرياضي (الشربيني، 2005).

في حين أظهرت دراسة إيمر (Emmer, 2005) وجود درجة من الثبات الثقافي في إدراك الجمال الرياضي، حيث تُقدَّر مفاهيم معينة بوصفها جمالية في ثقافات مختلفة. كما كشفت دراسة سا وألكوك وتانسويل (Sa, Alcock & Tanswell, 2024) عن طابع عالمي للجمال الرياضي، حيث بيّنت توافُق الأحكام الجمالية بين مجموعات ديموغرافية مختلفة باستخدام تقنية الحكم المقارن، مما يعكس معايير مشتركة تتجاوز الفروق الثقافية ومستويات الخبرة.

ويؤدي التفكير المنطقي دورًا أساسيًا في تقدير الجمال الرياضي من خلال تنظيم الاستدلالات وبنية الحلول (محمد، 2007). كما تبرز أهمية التفاصيل البصرية البسيطة في فهم الجوانب التنظيمية؛ فتعلم

الرياضيات لا يقتصر على الخطوات المنطقية، بل يتطلب تمييز السمات المهمة دون فرض قيود تعيق التحليل والفهم (Sinclair, 2006) .

وأشار زكي وآخرون (Zeki et al., 2014) إلى أن المعادلات الرياضية تمثّل أحد أرقى أشكال التعبير عن الجمال والبساطة؛ لما تتسم به من تناسق ووضوح في تمثيل القوانين الطبيعية، وتُعدّ البساطة مكونًا جوهريًا في هذا الجمال، الذي يرتبط بفهم المعاني الكامنة وراء البنية الرياضية للمعادلات، وقد مثّلت متطابقة أويلر نموذجًا بارزًا للأناقة الرياضية؛ إذ أظهرت الدراسة – باستخدام التصوير بالرنين المغناطيسي الوظيفي – (fMRI) أن المعادلات المصنّفة كجميلة، مثل: أويلر، فيثاغورس، وكوشي-ريمان، تحفّز نشاطًا دماغيًا يعكس تجربة جمالية معرفية، مما يؤكد إمكانية قياس الجمال الرياضي كمّيًا حتى في السياقات ذات الطابع التجريدي.

ووفقًا لتشاتيرجي وفارتانيان (Chatterjee & Vartanian, 2014) تنبثق التجارب الجمالية من تفاعل ثلاثة أنظمة عصبية: الحسّي الحركي، وتقييم المشاعر، والمعرفة والمعنى. ويُعدّ الأخير الأكثر تأثيرًا في الأحكام الجمالية الرياضية، خاصة لدى المتخصصين (Hayn-Leichsenring, Vartanian, & Chatterjee, 2022).

وفي السياق ذاته تشير دراسة هاين-لايشسينرينج وآخرين (Hayn-Leichsenring et al., 2022) إلى أن الخبرة الأكاديمية تُعزّز إدراك الجمال الرياضي؛ إذ يركّز المتخصصون على المعنى الرياضي والمعرفة السابقة، بينما يميل غير المتخصصين إلى الجوانب البصرية كالتناظر، كما أظهرت النتائج علاقة إيجابية بين البساطة والجمال، حيث فضّل المتخصصون المعادلات البسيطة، ما يؤكّد دور الخبرة في إدراك الجمال المعرفي.

إلى جانب المعادلات تُعدُّ البراهين الرياضية من أبرز مظاهر الجمال والبساطة في الرياضيات، فهي لا تقتصر على إثبات صحة النظريات، بل تمتد إلى الكشف عن العلاقات العميقة بين المفاهيم الرياضية المختلفة. ووفقًا لبول إردوس فإن البراهين الأكثر جمالًا هي التي تجمع بين البساطة والتناسق، مما يجعلها تُظهر الحقائق الرياضية بوضوح وإيجاز، وهذا السعي نحو البراهين الأنيقة يعكس رؤية علماء الرياضيات بأن تقديم الأفكار بأبسط صورة ممكنة يُضفي قيمة جمالية وفكرية، ويعزّز من الفهم العميق للرياضيات كعلم شامل (Youvan, 2024).

ويشير البعد الجمالي في الرياضيات إلى وجود معايير موضوعية يتفق عليها المختصون لتقويم البراهين، تتجاوز التفضيلات الذاتية ومن أبرزها ما قدّمه هاردي (Hardy, 2012): الاقتصاد في العرض، الأهمية، العمق، العمومية، عنصر المفاجأة، والحتمية. وهذه الخصائص تعكس التوازن بين البساطة والجمال، حيث تُعدّ البراهين الجذّابة تلك التي تجمع بين الإيجاز والوضوح وعمق الفكرة (McAllister, 2005).

وعلاوة على ذلك، رأى غودل أن الجمال يقوم على تقليص البدهيات وتبريرها، ما يعكس ركيزتي الأناقة والعمق في البرهان (Kostić & Vujošević, 2024; Jevtić et al., 2024)، وبرز تأثير هيلبرت في تأكيده أن بساطة البرهان لا تقتصر على عدد الخطوات، بل تشمل إبراز العلاقات الجوهرية، كما في مسألته الرابعة والعشرين، التي ركّزت على بساطة البراهين كأداة لفهم أعمق وأكثر تنظيمًا (Thiele, 2003; Thiele & Wos, 2002).

ورغم التقدير الكبير لكل من البساطة والجمال في الرياضيات، إلا أن العلاقة بينهما ليست دائمًا واضحة أو مباشرة؛ فقد أشارت دراسة ويلز (Wells, 1990) إلى أن البراهين البسيطة قد تُعدّ أحيانًا أقل

جمالًا؛ لافتقارها إلى العمق الفكري، في حين قد تفقد البراهين المعقّدة جاذبيتها؛ نتيجة غياب الإيجاز والوضوح. وتُبرز دراسات حديثة جانبًا آخر من هذا التعقيد؛ إذ أوضحت أن البراهين البسيطة تُقيَّم أحيانًا على أنها أقل جمالًا إذا افتقرت إلى عنصر المفاجأة أو الرؤى الفكرية العميقة (Hossenfelder, 2018; Inglis & Aberdein, 2015).

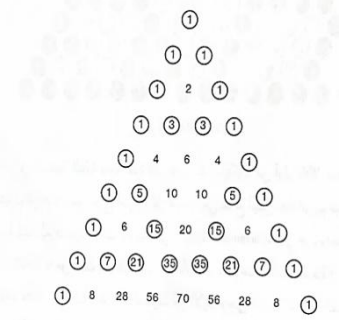
وتُعدّ بساطة البرهان مفهومًا متعدد الأبعاد يصعب تعريفه بدقة، لكنه يتجلى في تقليل الخطوات والرموز، وتجنّب التعقيد، والعمومية والتجريد، مما يعزّز وضوحه وقيمته الجمالية والفكرية، وتؤكّد رؤية هيلبرت هذا التكامل؛ إذ يرى أن الصرامة تقود إلى طرائق أوضح وأبسط، مما يرسّخ الصرامة معيارًا موثوقًا في الحكم على جمال البرهان الرياضي (Thiele & Wos, 2002).

وتمثِّل الهندسة بُعدًا آخر للجمال الرياضي، من خلال قدرتها على تبسيط المفاهيم المجردة كما في تمثيل الزمر هندسيًا بعمليات الدوران والانعكاس، وهذا النهج له جذور تاريخية تعود إلى الفيثاغورسيين، الذين ربطوا الجمال بالرياضيات عبر نظرية فيثاغورس، التي تُبرز سمات رياضية أساسية مثل: التناسق، والموضوعية، والتطبيق (Youvan, 2024; Bell, 2015).

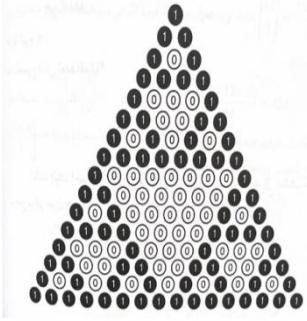
كما يظهر الجمال في التناغم الهندسي، مثل ميل الأشكال المنتظمة إلى الدائرة مع زيادة أضلاعها، أو التناسق بين المتتاليات العددية، حيث يُسهم تقديمها بأسلوب بسيط ومنظّم في تعزيز الإدراك الجمالي (Nunez, 2005). ومن زاوية أخرى يظهر الجمال المفاهيمي في الجبر المجرد عبر أناقة وبساطة مفاهيم رياضية مثل: الزمرة والحقل، وتُجسّد نظرية الفئات هذا الجمال المفاهيمي بقدرتها على توحيد بنية الرياضيات عبر مفاهيم بسيطة وعامة (Bell, 2015).

ومن أبرز أمثلة الجمال الرياضي التي تناولها إقليدس في كتابه *"العناصر"* القطاع الذهبي، حيث تتحقق النسبة الذهبية عندما تكون النسبة بين الجزء الأصغر والجزء الأكبر مساوية للنسبة بين الجزء الأكبر والكل، ويُعدّ هذا القطاع نموذجًا مثاليًا للجمال الرياضي؛ لما يعكسه من بساطة ودقة، وتتقاطع هذه الفكرة مع هندسة الفراكتال، التي تتميّز بالتناسق والتكرار الذاتي، مما يعزّز إدراك الجمال الرياضي (عطية، 1996؛ محمد، 2007).

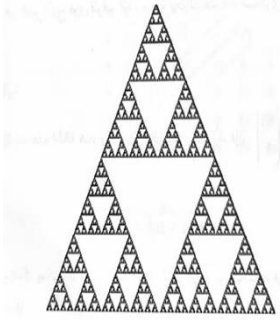
ويعكس مثلث باسكال الجمال والبساطة عبر أنماطه الرياضية المميزة، فعند وضع دوائر حول الأعداد الفردية، تتشكّل مثلثات داخل المثلث الأكبر(شكل 1)، بينما يظهر نمط مميز عند استبدال الأعداد الفردية بالرقم (1) والزوجية بالرقم (0) في مثلث مكون من 16 صفًا، حيث يُبرز خاصية رياضية **مفادها: أن مجموع عددين فرديين أو زوجيين ينتج عددًا زوجيًا** (شكل 2)، وعند استخدام 256 صفًا واستبدال الأعداد الفردية بمربعات سوداء والزوجية بمربعات بيضاء يظهر مثلث سيربينسكي كأحد الكنوز الرياضية الكامنة في مثلث باسكال (شكل3) (بينجامين، 2019/2015).



شكل (1): الأعداد الفردية في مثلث باسكال



شكل (2): نظرة طولية للأعداد الفردية



شكل (3): مثلث باسكال يناظر سيربينسكي

وتُعدُّ الأمثلة الجمالية وسيلة فعالة لتعميق فهم الطلاب وتقديرهم للرياضيات، مثل: نظرية فيثاغورس وصيغة أويلر لمتعدد السطوح خاصة عند تقديمها بأسلوب واضح ومبسَّط، كما تمثِّل الرمزية الرياضية بُعدًا جماليًا آخر يُبرز العلاقة بين البساطة والتعبير الرياضي، ويرى علماء الرياضيات جمالًا فريدًا في الرمزية الرياضية، يتجاوز المعاني التي تمثّلها الرموز ليشمل الجمال الحسي لتصميمها، مما يجعلها وسيلة مؤثرة في إيصال الأفكار المجردة وجذب اهتمام المتخصصين وغير المتخصصين على حد سواء (Bell, 2015).

وتُظهر الأبحاث أن تقدير هذا الجمال يؤدي دورًا مهمًا في التعليم المدرسي؛ إذ يُسهم في تعزيز المعرفة الرياضية عبر الجمع بين الجانب المفاهيمي والعاطفي، فالجمال لا يثري التعلُّم فحسب، بل يخلق تجربة تعليمية شاملة، تتسم بالعمق والتقدير العاطفي (Brinkmann, 2000; Sinclair, 2004; Hersh, 2013).

وهذا الجمال الرمزي يتطلب فهمًا عميقًا من المعلم ، الذي يعدّ المحور الأساس في توجيه الطلاب نحو استيعاب الجمال الرياضي، كما يساهم إدراك المعلم لهذا البعد في تجاوز صعوبات المحتوى وتعزيز الفهم (عبيدة، 2013). وفي سياق الممارسات الصفية أشارت دراسة محمد (2007) إلى أهمية دمج الجوانب الجمالية في تعليم الرياضيات، عبر توجيه النقاش نحو الحلول الرشيقة والبسيطة، مما يسهم في تحسين جودة التعليم عبر مختلف المراحل الدراسية.

وعلى مستوى المراحل الدراسية، تُعدُّ المرحلة الثانوية مثالًا بارزًا لأهمية هذا النهج، حيث أشارت دراسة المالكي والمالكي (2018) إلى أنها مرحلة حاسمة في بناء القاعدة المعرفية للطلاب، تُزوّدهم بأسس علمية قوية، وتُمهّد لهم المراحل الأكاديمية والمهنية اللاحقة.

وفي ضوء ما سبق، تتضح أهمية دور المعلم والمشرف في تعزيز الجوانب الجمالية في تعلم الرياضيات وتعليمها؛ مما ينعكس إيجابًا على جودة الممارسات التدريسية.

مشكلة البحث

على الرغم من أن الرياضيات تُمثّل انعكاسًا لقيم فلسفية ومعرفية مثل: البساطة والجمال، التي تُعزز التفكير الناقد والإبداعي، وتُبرز عمق البنية الرياضية (Jevtić, et al., 2024; Youvan, 2024)؛ إلا أن الدراسات السابقة ومنها دراستا تشين وزيمرمان (Chen, 2017; Zimmerman, 2018) كشفتا عن تحدّيات تواجه تطبيق هذه القيم في التعليم المدرسي، أبرزها: ضعف وعي المعلمين بأهميتها، ونقص التدريب اللازم لتوظيفها بفعالية في الممارسات التدريسية.

وفي سياق متصل أكّدت دراسة عبد الهادي (2014) على أهمية إجراء بحوث متعمقة؛ لاستقصاء مدى قدرة المعلمين على تبني منظور جمالي في التدريس. وتعزيزًا لهذا التوجّه دعت دراسة فانغ وكونغ وتشين (Fang, Kong, & Chen, 2023) إلى فهم أعمق؛ لإدراك المعلمين لقيم البساطة والجمال الرياضي، وتوظيفها بفعالية في الممارسات التدريسية.

وبالرغم من الجهود الدولية لتعزيز التعليم المرتبط بالقيم الجمالية؛ تظل الدراسات العربية محدودة في إطار دور مشرفات الرياضيات ومعلماتها في توظيف هذه القيم -على حدّ علم الباحثين-، وبخاصة في المرحلة الثانوية التي تُعَدّ مرحلة نوعية في تشكيل التصورات المفاهيمية العميقة لدى الطلاب. كما أشار فيليجاس-ريمرز (Villegas-Reimers, 2003) إلى أن تصورات المعلمين تُعدُّ عنصرًا محوريًا لنجاح أي إصلاح تعليمي؛ إذ تؤثّر بشكل مباشر على جودة المخرجات التعليمية.

وبناءً على ما تقدَّم تبرز الحاجة إلى دراسة متخصصة تُعنى بدراسة البساطة والجمال في سياق المعرفة الرياضية، حيث تتحدّد مشكلة البحث في الكشف عن تصوُّرات مشرفات رياضيات المرحلة الثانوية ومعلماتها حول مفهومي البساطة والجمال

الرياضي، ودراسة انعكاس هذه التصورات على ممارساتهن التدريسية.

أسئلة البحث

1. ما تصورات مشرفات الرياضيات ومعلماتها حول البساطة والجمال في المعرفة الرياضية؟
2. كيف تؤثّر تصورات مشرفات الرياضيات ومعلماتها حول البساطة والجمال في المعرفة الرياضية في ممارساتهن الأدائية؟

أهداف البحث

هدف البحث إلى الكشف عن تصورات مشرفات الرياضيات ومعلماتها حول مفهومي البساطة والجمال في المعرفة الرياضية، وتحليل التأثيرات المحتملة لهذه التصورات في ممارساتهن الأدائية.

أهمية البحث

استمدَّ هذا البحث أهميته من إمكانية إسهامه في الجوانب الآتية:

الأهمية النظرية

التأصيل النظري لمفهومي البساطة والجمال في الرياضيات، ولا سيّما في ظل نُدرة الأدبيات العربية التي تناولت ذلك -على حدّ علم الباحثين-، مما يتوقع أن يكون هذا البحث إضافة أصيلة في مجال تعليم الرياضيات.

الأهمية التطبيقية

توجيه أنظار القائمين على برامج التطوير المهني لمعلمي الرياضيات ومشرفيها نحو تضمين مفهومي البساطة والجمال؛ لما لهما من أثر إيجابي في تشكيل تصوراتهم وتطوير ممارساتهم، بما يعزّز جودة نواتج التعلم. كما يفتح المجال أمام الباحثين لاستكشاف سبل توظيف هذين المفهومين بفعالية في تحسين جودة تعليم الرياضيات ورفع كفاءته.

مصطلحات البحث

تصوّرات Perceptions

يُعرِّفها براون (Brown, 2017) بأنها: مجموعة من المعارف والمعتقدات التي يحملها المعلم، ومن شأنها أن تُؤثّر في ممارساته في التعليم.

وتُعرّف إجرائيًا بأنها: مجموعة من المعارف والقيم والمعتقدات التي تعبِّر عنها مشرفات الرياضيات ومعلماتها في المرحلة الثانوية حول مفهومي البساطة والجمال في المعرفة الرياضية

البساطة Simplicity

يُعرِّفها محمد (2007) بأنها: الوضوح الذي يُمكّن المتعلم من استيعاب البراهين الرياضية، وفهم الحلول للمشكلات المعقّدة، أو إدراك الأنماط والبنى الرياضية، وذلك عبر الاعتماد على مفاهيم رياضية أساسية، ومبادئ منهجية منظّمة.

وتُعرّف إجرائيًا بأنها: وضوح المفاهيم والعلاقات الرياضية للوهلة الأولى، وسهولة تنظيمها وعرضها، بما يتيح للمُتعلّم فهمها وتتبع الإجراءات والأنماط دون تعقيد، ويُستدَلُّ عليها عبر تحليل استجابات مشرفات الرياضيات ومعلماتها في المرحلة الثانوية في أثناء المقابلات، مع التركيز على آرائهن حول وضوح العناصر الرياضية وسهولتها.

الجمال في الرياضيات Beauty in mathematics

يُعرِّفه فانغ وآخرون (Fang et al., 2023) بأنه: ظاهرة حدسية تُدرَك عبر التفاعل مع الخصائص الجمالية الكامنة في الرياضيات، وتشمل: بساطة اللغة الرياضية، وأناقة الصيغ، وابتكار الأفكار والأساليب المستخدمة في حلّ المشكلات، مما يعكس التناغم والتناسق في البنى الرياضية، ويبرز قدرة الرياضيات على الدمج بين البُعدين العلمي والإنساني. **ويُعرِّفه جيفتيتش وآخرون (Jevtić et al., 2024) بأنه:** مفهوم جمالي محوري، يُعبِّر عن القدرة على الكشف عن الروابط العميقة بين المشكلات أو المجالات التي تبدو غير مترابطة ظاهريًا، مما يسهم في تحقيق فهم شامل وأكثر عمقًا للبنية الرياضية. ويرتبط هذا الجمال بعناصر، مثل: العمق، والأناقة، والبساطة، والتكامل، مما يجعله حافزًا للإبداع الفكري في البحث الرياضي، ويعكس التناسق الجمالي بين الأفكار والأساليب الرياضية.

ويُعرّف إجرائيًا بأنه: مفهوم محوري يُعبّر عن استجابات إدراكية وعاطفية تجاه الخصائص الجمالية للمعرفة الرياضية، والتي تتجلّى فيما تتيحه هذه المعرفة من كشف الترابطات العميقة وغير الظاهرة بين المفاهيم، وتقديم حلول مبتكرة تجمع بين الجاذبية الفكرية والدقة الرياضية. ويتمثّل هذا الجمال في عدد من السمات، أبرزها: **البساطة:** التي تعني سهولة الفهم، **والتناسق:** الذي يشير إلى التناغم بين المكونات المختلفة، **والأناقة:** التي تعبّر عن الإيجاز والكفاءة في العرض، **والعمق:** الذي يعني إدراك الجوانب الأساسية والمعاني الكامنة وراء المفاهيم، مع استيعاب الترابطات والعلاقات المعقدة بينها، **والتكامل:** الذي يعكس الترابط الشامل بين المفاهيم، **والإبداع:** الذي يعني تقديم أفكار جديدة، **و إثارة الإعجاب:** الذي يتمثّل في الإحساس بالتقدير الناتج عن جمال وترابط العناصر الرياضية، أو براعة حلولها وإبداعها، ويُستدل عليه من خلال تحليل استجابات مشرفات الرياضيات ومعلماتها في المرحلة الثانوية في أثناء المقابلات.

المعرفة الرياضية Mathematical knowledge

يعرّفها باترسون وباروت وبيلناب (Patterson, Parrott & Belnap, 2020) **بأنها:** هي المفاهيم والمهارات المتعلِّقة بالعلاقات الرياضية التي تُمكّن الأفراد من فهم الأفكار الرياضية، وتفسيرها، وتطبيقها بفعالية في سياقات متنوعة.

وتُعرّف إجرائيًا بأنها: مجموعة مختارة من المفاهيم، والبراهين، والأنماط، والمعادلات، والصيغ الرياضية، التي تُعرض على المشاركات (مشرفات الرياضيات ومعلماتها في المرحلة الثانوية) كنماذج تمثيلية؛ لاستكشاف تصوّرهن حول جماليتها وبساطتها، ويُستدَل على الجمال والبساطة في هذه النماذج من خلال تحليل استجابات المشاركات في أثناء المقابلات شبه المنظّمة.

كما يُعرّف الباحثان البساطة والجمال في المعرفة الرياضية إجرائيًا بأنهما: قيم مترابطة تُسهم في تقديم المعرفة الرياضية بأسلوب يُعزّز من وضوحها وسهولة فهمها واستيعابها، وتركّز هذه القيم على وضوح المفاهيم الرياضية ورشاقة البراهين، إلى جانب التناسق والتناغم بين الأنماط والعلاقات الرياضية، وسلاسة الحلول والإجراءات المستخدمة لفهم العلاقات الرياضية وتفسيرها.

منهج البحث وإجراءاته

منهج البحث

اتبع البحث **منهج البحث النوعي الأساس** Basic-Qualitative Research، والصفة الأساسية لهذا النوع من البحوث هي أن الأفراد يبنون الواقع بالتفاعل مع العالم الاجتماعي المحيط بهم، فالباحث يهتم بفهم المعنى الذي لدى المشاركين في البحث للظاهرة المدروسة، وغالبًا ما ينتج عن هذا النوع من البحوث عددا من المحاور (الموضوعات) المستخلصة من البيانات، التي تمثّل إجابة عن سؤال البحث (العبد الكريم، 2020). إضافة إلى ذلك يُعدُّ البحث النوعي وسيلة فعالة لفهم الظواهر الاجتماعية من منظور المشاركين أنفسهم (مقدم، 2015).

المشاركون في البحث

شارك في هذا البحث ثلاث مشرفات تربويات، وخمس معلمات يدرّسن مقررات الرياضيات للمرحلة الثانوية، حيث تم اختيارهن باستخدام عينة قصدية معيارية، من مكتب إدارة تعليم الخرج بالتنسيق مع رئيسة شعبة مشرفات الرياضيات بالإدارة لترشيح المشاركات، وذلك بناءً على معايير تشمل التنوع في طبيعة العمل (معلمات/مشرفات)، والمؤهل التعليمي، والخبرة، والرتبة الوظيفية والكفاءة في تدريس الرياضيات؛ إذ يُتوقع أن تُسهم خلفيتهن المهنية في تقديم بيانات نوعية تعكس تصورات مُعَمَّقة، مما يدعم تحقيق أهداف البحث. وقد تم التواصل مع المشاركات والحصول على موافقتهن، ثم تعريفهن بطبيعة البحث، مع الالتزام بمبادئ السرية

والخصوصية وذلك باستخدام رموز مستعارة للإشارة إليهن، كما هو موضح في الجدول (1).

جدول (1)

البيانات الديموغرافية للمشاركات

م	رمزه	الدور الوظيفي	المؤهل التعليمي	عدد سنوات الخبرة	الرتبة الوظيفية
1	ش1	مشرفة	بكالوريوس	15	خبير
2	ش2	مشرفة	بكالوريوس	20	خبير
3	ش3	مشرفة	بكالوريوس	25	متقدم
4	م 1	معلمة	بكالوريوس	13	خبير
5	م2	معلمة	بكالوريوس	18	متقدم
6	م3	معلمة	بكالوريوس	15	ممارس
7	م4	معلمة	بكالوريوس	14	ممارس
8	م5	معلمة	ماجستير	17	متقدم

أداة البحث

تمثّلت أداة البحث في مقابلة شبه منظّمة، تهدف إلى استكشاف تصورات مشرفات الرياضيات ومعلماتها حول مفهومي البساطة والجمال في المعرفة الرياضية. وصُمّمت الأداة بعد الاطلاع على الأدبيات ذات العلاقة (بينجامين، 2019/2015؛ Richman, 1999; Usiskin, 2001; Zeki et al., 2014; Sa et al., 2024)، واستخدمت مزيجًا من الأسئلة المفتوحة والمقارنة، مستندة إلى تقنية النهج المقارن (*Comparative Judgement Technique – CJ*)، التي تُعدّ فعالة في جمع بيانات نوعية، تعتمد على أحكام نسبية (Thurstone, 1994)، وقد أثبتت جدواها في سياقات بحثية مشابهة مثل: قياس الفهم المفاهيمي واستكشاف الأحكام الجمالية في الرياضيات (Bisson et al., 2016; Jones et al., 2019; Sa et al., 2024). وقد ساعد استخدام هذه التقنية في بناء أداة مرنة، تجاوزت التحدّيات الفلسفية المرتبطة بتقويم مفهومي البساطة والجمال، مما أتاح جمع بيانات دقيقة، وأثرى البحث برؤى نوعية عميقة.

ونظرًا للطبيعة الذاتية والمجردة لمفهومي البساطة والجمال (Bisson, Gilmore, Inglis & Jones, 2016؛ لم تُقدَّم معايير مسبقة للمشاركات، مما أتاح لهن حرية التعبير عن تصوراتهن الفردية.

وقد بدأت الأداة بجمع معلومات أساسية عن المشاركات، ثم تكوّنت من خمسة أقسام: ركّز القسم الأول على الأسئلة العامة؛ لاستكشاف التصورات الأولية للمفهومين، بينما استعرض القسم الثاني جمال الأنماط الهندسية باستخدام أمثلة، مثل: مثلث باسكال، ومثلث سيربنسكي، ومن بين أسئلته" :كيف ترين مثلث باسكال من الناحية الجمالية في الرياضيات؟ وما الخصائص التي تعتقدين أنها تُبرز قيمته الجمالية إن وجدت؟" وتناول القسم الثالث أسئلة المقارنة؛ لتحليل السمات الجمالية والبسيطة في معادلات ومفاهيم رياضية. في حين ركّز القسم الرابع على تقييم الرسومات البيانية، وأخيرًا تناول القسم الخامس البراهين الرياضية، حيث قورن البرهانان الجبري والبصري بالإضافة إلى برهانين مختلفين؛ لإثبات النظرية ذاتها. وكما عُرضت الأسئلة على مختصين في تعليم الرياضيات لمراجعتها، وأُجري اختبار أولي لأداة المقابلة على معلمة خارج العينة، ثم عُدّلت الأداة وفقًا للملحوظات الواردة. كما راعى الباحثان توحيد الصياغة وتسلسل الأسئلة لجميع المشاركات، مع استخدام أسئلة متابعة لاستكشاف أبعاد أعمق، مما عزّز من جودة البيانات واتساقها.

الموثوقية

تم التّحقق من الموثوقية باتباع عدد من الإجراءات المنهجية ذكرها لنكن وجوبا وكريسويل (Creswell, 2007; Lincoln & Guba, 1985)، حيث تم تعزيز المصداقية عبر المشاركات لاستجاباتهن، والتأكّد من دقة تمثيل وجهات نظرهن، إلى جانب إتاحة المجال للتعبير بحرية عن تصوراتهن، كما تم التّحقق من الاعتمادية عبر توثيق تصميم البحث وإجراءاته، ووصف مفصّل لأداة جمع البيانات وتحليلها، أما الانتقالية من خلال تقديم وصف دقيق لسياق البحث، وعينة المشاركات، وإجراءات جمع البيانات وتحليلها، وتم التحقّق من التطابقية بمناقشة خطوات

البحث مع المختصين والأقران ، وتقديم أمثلة من استجابات المشاركات. وقد ساهمت هذه الإجراءات مجتمعة في دعم موثوقية الدراسة ووضوح نتائجها.

جمع البيانات

بعد اختيار المشاركات والحصول على موافقتهن؛ تم التنسيق مع كل منهن لتحديد موعد مناسب لإجراء المقابلات عبر تطبيق "زوم" (Zoom)، وقد تم تقديم شرح واضح لأهداف البحث وطبيعته وحقوق المشاركة، بما في ذلك الحق في الامتناع عن الإجابة، أو طلب التوضيح، أو الانسحاب في أي وقت دون تبعات. كما تم توضيح التزامات الباحثين تجاه سرية البيانات، واستخدامها لأغراض البحث فقط، مع الحصول على موافقة مسبقة لتسجيل المقابلات. وقد تراوحت مدة المقابلات بين 45 و60 دقيقة، بما يضمن تناول الموضوعات البحثية بعمق ووضوح.

تحليل البيانات

اتبعت خطوات التحليل الموضوعي (Thematic Analysis) للمقابلات الفردية، حيث رُمّزت نصوص المقابلة في عملية تكرارية؛ للكشف عن الموضوعات المهمة، التي تُشكّل إجابات لسؤال الدراسة. ووفقًا لبراون وكلارك (Braun & Clarke, 2006) فإن عملية التحليل الموضوعي اتبعت ست خطوات متتالية، هي: التعمّق في قراءة البيانات، وإنشاء الرموز (Codes)، وبناء الموضوعات، ومراجعة الموضوعات، وتحديد وتسمية الموضوعات، وأخيرًا إنتاج التقرير. وقد بدأت عملية التحليل بتفريغ البيانات من التسجيلات الصوتية، ثم الترميز بتحديد النقاط الرئيسة، ثم الموضوعات الفرعية، ثم تجميع الموضوعات الفرعية في نهاية المطاف في موضوعات رئيسة.

الاعتبارات الأخلاقية

تم الالتزام بالمعايير الأخلاقية في جمع البيانات وتحليلها، حيث أُبلغت المشاركات بأهداف الدراسة، وأُخذت موافقتهن، مع ضمان الخصوصية وسرية المعلومات وحرية التعبير وحق الانسحاب. وحُفظت البيانات بأمان، ثم حُذفت نهائيًا بعد انتهاء الدراسة.

نتائج الدراسة ومناقشتها

هدف البحث إلى استكشاف تصوُّرات مشرفات ومعلمات الرياضيات حول البساطة والجمال في المعرفة الرياضية، من حيث: مدى معرفتهن بها وتأثيرها على ممارساتهن الأدائية، وأسفرت عملية التحليل عن ظهور ثلاثة موضوعات رئيسة تُغطي في مجملها أبعاد السؤالين البحثيين، وهي: **البساطة والجمال في المعرفة الرياضية، و أبعاد البساطة والجمال في النماذج الرياضية (الأنماط العددية والهندسية، والمعادلات، والبراهين)، و انعكاس البساطة والجمال في المعرفة الرياضية على الممارسات التدريسية والإشرافية.**

أولًا: البساطة والجمال في المعرفة الرياضية

تفسير نتائج تصوُّرات مشرفات الرياضيات ومعلماتها حول البساطة في المعرفة الرياضية

بالنظر إلى تحليل الاستجابات يظهر اتفاق عام بين المشرفات والمعلمات حول مفهوم البساطة في المعرفة الرياضية، حيث تمحور **حول السهولة والوضوح، وتقليل التعقيد** كعناصر أساسية. ورغم هذا التوافق؛ فقد أظهرت النتائج تباينات واضحة في العمق والرؤية بين المشاركات.

حيث تُجمع المشاركات على أن السهولة تعني تقديم المفاهيم والحلول بأسلوب مباشر وبسيط، كما أظهرت الاستجابات مثل م3: "السهولة والحل في أقصر وقت"، وش2: "تطبيق القانون بصورة سهلة". إلا أن التركيز الكبير من المشاركات على الكفاءة الزمنية وتبسيط الخطوات قد يُشير إلى تصوُّر محدود للبساطة، حيث يتم اختزالها في تقليل المجهود المباشر بدلاً من التعامل معها كإطار معرفي أعمق. ويتعارض هذا التوجُّه مع تعريف البساطة كما أشار إليه محمد (2007)، الذي يرى أن البساطة يجب أن تُيسِّر للمتعلِّم استيعاب البراهين الرياضية، وفهم الحلول للمشكلات

المعقّدة، وإدراك الأنماط والبنى الرياضية عبر مبادئ واضحة ومنظمة.

علاوة على ذلك أظهرت الاستجابات أن بعض المشرفات يمتلكن تصوّرًا أكثر شمولية، حيث ركّزن على أن الوضوح يجب أن يتحقّق دون الإخلال بالمعنى الرياضي، كما أشارت لذلك ش3: "الوضوح في تقديم المفاهيم مع عدم الإخلال بالمعنى". ويُظهِر هذا التصوُّر وعيًا أكبر بالعلاقة بين البساطة والدقة العلمية، مما يعكس فهمًا يتماشى مع البنية المنهجية للرياضيات.

أما فيما يخص تقليل التعقيد فقد اتفقت المشاركات على تجنُّب الرموز والتفاصيل الزائدة التي قد تُربك المتعلم، حيث أشارت م2: "عدم التعقيد في تقديم المفاهيم"، وم3: "التقليل من الرموز". ومع ذلك فقد كان هناك اختلاف في العمق، حيث تعاملت بعض الآراء مع تقليل التعقيد كوسيلة لتسهيل الفهم، بينما أظهرت أخرى إدراكًا أوسع لأهمية تقديم المفاهيم بشكل يُبرز الروابط المنهجية والعلاقات الجوهرية دون الإخلال بالبنية الرياضية.

تفسير نتائج تصوُّرات مشرفات الرياضيات ومعلماتها حول الجمال في المعرفة الرياضية.

تشير النتائج إلى أن تصوّرات معلمات ومشرفات الرياضيات حول الجمال في المعرفة الرياضية تقترب من العناصر الأساسية لتعريف الجمال كما ورد في الأدبيات، إلا أنها تُظهر تفاوتًا في العمق والتكامل والدقة عند قياسها بالتعريفات الأكاديمية. واستنادًا إلى تحليل الاستجابات يمكن تصنيف تصوُّراتهن ضمن ثلاثة أبعاد رئيسة: **الألفة والترابط الرياضي، والإبداع، والتناسق والتضاد.**

حيث تُظهِر استجابات المشاركات فهمًا جيدًا لجمال الألفة والترابط بين المفاهيم الرياضية، إذ ذكرت م3 أن: "الجمال في الترابط"، وش1: "الجمال أن تكون الفكرة مرتبطة بأكثر من مفهوم"، ويمكن تفسير هذا الفهم في ضوء ما طرحه **جيفتيتش وآخرون** (Jevtić et al., 2024) من أن الجمال يكمن في الكشف عن الروابط العميقة بين المفاهيم المختلفة، مما يُسهم في تحقيق فهم أكثر شمولية وتكاملاً. كما عبّرت المشاركات عن أهمية ارتباط المفاهيم بالمعرفة السابقة؛ بوصفه أحد عناصر الجمال الرياضي، حيث رأت م3 أن: "المعرفة السابقة تجعل المفهوم جميلًا"، و م5: "عندما يرتبط بمهارات سابقة"، وش2: "التركيز على المعرفة القبلية؛ لربطها بالمعلومات الجديدة يزيد الرياضيات جمالًا"، وهو ما يتسق مع رؤية كانط للجمال بوصفه تجربة ذاتية ناتجة عن توافق المعرفة الجديدة مع قدرات المتعلم، بما يجعل المفاهيم أكثر وضوحًا وجاذبية.

وحول **جمال الإبداع** تُظهر استجابات المشاركات توافقًا مع ما أشار إليه **جيفتيتش وآخرون** (Jevtić et al., 2024) حول جمال الإبداع في الرياضيات، الذي يُبرز التناغم والتناسق في العلاقات الرياضية. وركّزت المشاركات على الإبداع كعنصر أساسي في الجمال، فقد رأت ش1: "الجمال فن وطرق إبداعية في حلّ المسائل الرياضية"، وم3: "الجمال الرياضي في استثارة الفكر". كما عبّرت م 3 عن المتعة في ابتكار حلول مختلفة ومختصرة بقولها: "الجمال هو المتعة في ابتكار حلول مختلفة للمسائل الرياضية"، حيث تعكس هذه الرؤية الإبداع كعملية فكرية تُظهر جمال الرياضيات، من خلال التكامل بين المفاهيم والكفاءة في الحلول.

كذلك عبّرت المشاركات عن تصورهن للجمال الرياضي بوصفه ترابطًا بين العناصر الرياضية، سواء عبر التجانس أو التضاد، كما ذكرت م4: "الجمال هو الترابط بين العبارات والأشكال إما بتجانس أو تضاد"، و م1: "الجمال يظهر في الأنماط والهيكل سواء أكان أرقامًا أو أشكالًا"، ويرتبط هذا التصوُّر مباشرة بتعريف فانغ وآخرين (Fang et al., 2023)، الذي يؤكّد على التناغم بين البنى الرياضية.

وتُظهر النتائج أن تصوّرات المشاركات للجمال الرياضي تميل إلى التركيز على عناصر مثل: الألفة والتناسق، دون أن تتوسع بالقدر الكافي نحو تكامل

أعمق بين المفاهيم الرياضية. ويُلاحظ أن هذا التصوّر لا يعكس بالكامل البنية المفاهيمية التي اقترحها **جيفتيتش وآخرون** (Jevtić et al., 2024)، التي تؤطّر الجمال الرياضي ضمن عناصر متكاملة تشمل: العمق، والأناقة، والبساطة، والتكامل.

وفي سياق متصل تشير النتائج إلى أن بعض المشاركات ربطت بين البساطة والجمال في الرياضيات، كما في قول ش3: "البساطة معيار على وجود الجمال، وليست مجرد أداة لتسهيل الفهم، بل هي عنصر جوهري في الجمال الرياضي"، وهو ما يتفق مع رؤية **بو انكاريه** للجمال؛ بوصفه نابعًا من قيمتي البساطة والوحدة. كما قدّمت م1 تصورًا تكامليًا، مشيرة إلى أن: "جمال الرياضيات مرتبط ارتباطًا وثيقًا بالبساطة عندما تمتزج بالتعقيد"، مما يعكس التوازن بين البساطة والتعقيد الذي أشار إليه **برينكمان** (Brinkmann, 2000) في تحقيق الجمال الرياضي. ومع ذلك أظهرت بقية الاستجابات تباينًا في إدراك العلاقة بين البساطة والجمال، مما يتفق مع ما أشارت إليه دراسة **ويلز** (Wells, 1990) بأن العلاقة بينهما ليست دائمًا واضحة أو مباشرة؛ إذ من الممكن أن يتحقّق الجمال الرياضي عبر عوامل أخرى تتجاوز البساطة.

ثانيًا: أبعاد البساطة والجمال في النماذج الرياضية

تفسير نتائج تصورات مشرفات الرياضيات ومعلماتها حول البساطة والجمال في الأنماط العددية والهندسية.

تكشف نتائج الاستجابات تنوّعًا في تصورات المشاركات حول البساطة والجمال في الأنماط العددية والهندسية، حيث برز تقدير واضح للأنماط ذات البنية المنتظمة والواضحة، مثل: مثلث باسكال؛ لما يتسم به من تنظيم وتكرار يسهل إدراكه. وفي المقابل تباينت التصورات تجاه الأنماط الأكثر تعقيدًا، كما في مثلث سيربنسكي، الذي لم يحظَ بتقدير جمالي مماثل لدى بعض المشاركات، ما يشير إلى ارتباط التصورات بالوضوح البصري أكثر من الارتباط بالبنية الرياضية العميقة. وقد عكست التصوّرات خصوصًا لدى المعلمات تركيزًا على السمات الشكلية والتناغم الظاهري، مع إشارات محدودة إلى الأبعاد المفاهيمية الكامنة، مما يفتح المجال لمناقشة هذه الجوانب بتفصيل أكبر.

حيث أظهرت استجابات المشاركات تقديرًا واضحًا لدور البساطة في الأنماط العددية والهندسية، وبخاصة في مثلث باسكال، حيث أكدت م1 أنه "يُسهم في سهولة الوصول لمعامل أي حد في مفكوك ذات الحدين"، بينما عبّرت م3 عن جمال النمط بقولها: "رمز من رموز الجمال؛ لوجود النمط ولوضوحه وسهولته، واعتماده على الجمع وارتباطه بالهندسة كمثلث"، مما يشير إلى إدراك البنية الرياضية البسيطة بوصفها مصدرًا للجمال. في حين ركّزت المشرفات على الجانب البنيوي الأعمق، كما في ش2: "عنصر التنبؤ أضاف الجمال... البناء الرياضي فيه عمق وتناسق"، وش3 التي وصفت مثلث باسكال بأنه "مرجع يعزّز المفاهيم... يجمع بين البنية الواضحة والعلاقات المتكاملة"، وهي رؤى تتسق مع ما طرحه جيفتيتش وآخرون (Jevtić et al., 2024) حول الجمال الرياضي بوصفه تناغمًا بنيويًا يُبرز العلاقات بوضوح وتكامل.

أما بشأن الأنماط المعقّدة فقد تباينت الآراء حول مثلث سيربنسكي؛ فبينما رأت ش2 أنه "يتسم بالتعقيد ولا يتضح فيه بعد جمالي" وصفته م2 بأنه "رمز للجمال"، في حين أشارت م3 إلى أن "عدم معرفتي به قلّل من جماله لديّ"، مما يعكس أثر المعرفة المسبقة على إدراك الجمال، وهو ما يؤكّده هاين-لايشسينرينج وآخرون (Hayn-Leichsenring et al., 2022) في دراستهم حول دور الخبرة في تقدير الجوانب الجمالية في النماذج الرياضية.

تفسير نتائج تصورات مشرفات الرياضيات ومعلماتها حول البساطة والجمال في المعادلات الرياضية.

أظهرت استجابات المشاركات وعيًا بدور البساطة والجمال في المعادلات الرياضية، حيث

ارتبطت البساطة بالوضوح وسهولة التطبيق، كما ذكرت م1 أن "المعادلة الخطية واضحة وسهلة التطبيق"، ورأت م2 أن "اختصار الرموز وقصر المعادلة هو بساطة"، بينما ركزت ش2 على أن "الوضوح والسهولة أهم من قصر المعادلة"، ما يعكس تنوّع التصورات حول البساطة كقيمة وظيفية. أما الجمال فقد أشارت ش1 أن "وضوح المعادلة أو تعقيدها لا يؤثّر على جمالها الرياضي" وأكدت م3 أن "ربط المعادلات بين عدة مفاهيم يُشكّل تنوعًا يعطي عمقًا بالمعرفة."مما يعكس فهمًا للجمال كقيمة منفصلة عن بساطة التكوين تعتمد التناسق والعمق.

كما عُدّ التعقيد محفزًا للتفكير والإبداع، حيث أشارت م1 إلى أن "التعقيد يثير الفضول ويكون سببًا للبحث والوصول للحل"، وذكرت م2 أن "التعقيد فيه جمال؛ لأنه نوع من التحدي"، وأضافت ش2 أن "التعقيد يكون جميلًا في حال وجود وقت للتأمل"، ما يشير إلى ارتباط الجمال بالجهد التأملي والفهم العميق. وأبرزت المشاركات دور الرموز الرياضية في تحقيق البساطة والجمال، فوصفت م2 الرموز بأنها "اختصار يحقق البساطة"، ورأت م3 أنها "تضيف جمالًا"، ووصفت ش2 الدوال الأسية بأنها "جذابة"، ما يعكس إدراكًا للجمال القائم على التناسق الرمزي، بما يتفق مع رؤية بيل في دراسته (Bell, 2015) .

كما أجمعت المشاركات على جمال عدد من المعادلات الرياضية، مثل: صيغة أويلر، والمتطابقة المثلثية، والمتسلسلة الهندسية، لما تتسم به من ترابط بنيوي وتناسق منطقي. وقد ساهم في تفضيل هذه المعادلات كونها مألوفة لدى جميع المشاركات، وهو ما يتفق مع ما أشار إليه ويلز (Wells, 1990) بشأن أثر الألفة بالمفاهيم الرياضية في تشكيل الإدراك الجمالي، ويتسق ذلك مع نتائج دراسة زكي وآخرين (Zeki et al., 2014) التي صنّفت صيغة أويلر كأحد أجمل النماذج الرياضية لتوازنها بين البساطة والعمق.

تفسير نتائج تصورات مشرفات الرياضيات ومعلماتها حول البساطة والجمال في البراهين الرياضية.

أظهرت استجابات المعلمات والمشرفات تقديرًا واضحًا للبساطة كعنصر جوهري في جمال البراهين الرياضية، حيث ركّزت التصوّرات على وضوح الخطوات وسهولة الفهم؛ كما أوضحت ش1 أن "البرهان البصري أكثر جمالًا؛ لوضوحه وسهولته"، وأكّدت ش3 أن "البرهان البصري يعتمد على تصور مباشر للعلاقة بين العناصر". وبرزت عناصر أخرى مثل: التسلسل المنطقي والإيجاز والترابط، إذ ذكرت ش2 أن "تسلسل الخطوات المنطقية والإقناع أهم شيء لجمال البرهان"، بينما رأت م2 أن المسلمات "مثالًا على جمال الرياضيات"؛ لما فيها من صرامة ويقين، وتتفق هذه التصوُّرات مع رؤية كوستيتش وفوجوسيفيتش (Kostić & Vujošević, 2024) التي تربط الجمال بالأناقة والإيجاز والعمق.

ورغم تفضيل أغلب المشاركات للبرهان الجبري لسهولة تتبعه واعتماده على مهارات سابقة (م1، م2، م3)؛ أبدت أخريات تقديرًا للبراهين البصرية؛ وذلك لقدرتها على إبراز العلاقات الرياضية بوضوح (ش3)، مع الإشارة إلى صعوبتها أحيانًا كما في قول م5: "البرهان البصري غالبًا ما يكون معقدًا حتى لو كانت فكرته واضحة". ويعكس هذا التنوع ما أشار إليه ثيل ووس (Thiele & Wos, 2002) من أن معايير الجمال تختلف بحسب السياق ونوع البرهان.

أيضا تُظهر التصورات تحقّق عدد من معايير هاردي، مثل: الوضوح، والاقتصاد، والحتمية، إلا أن معيار العمق كان الأقل، إذ ركّزت المشاركات غالبًا على سهولة التطبيق والإيجاز دون التوسّع في العلاقات الرياضية الأعمق. كما تبيّن تباين في تفضيل البراهين الجبرية والبصرية، مما يبرز أهمية التنويع في تقديمها لتعزيز فهم أوسع لجمال البراهين.

ومن زاوية اخرى أشارت المشاركات إلى دور المفاجأة في تعزيز الجمال الرياضي، حيث وصفت ش3 الجمال بأنه "يكمن في البرهان عندما يتحول عنصر المفاجأة إلى بديهية مدهشة بعد الفهم"، واعتبرت م2 أن "المفاجأة تجعل البرهان مشوقًا". ويتسق هذا مع ما

أشار إليه ساتيام (Satyam, 2016) حول المفاجأة كعنصر يعمّق الفهم، كما أيدّت دراسة كويتشو وآخرين (Koichu, Katz, & Berman, 2017) هذا الطرح، مؤكدة أن المشكلات ذات الحلول المفاجئة تُعدّ أكثر جمالًا لدى المتعلمين، ما يعكس العلاقة الوثيقة بين المفاجأة والجمال في التعليم الرياضي.

ثالثًا: انعكاس البساطة والجمال في المعرفة الرياضية على الممارسات الأدائية

تشير النتائج إلى أن تصوّرات المعلمات والمشرفات حول البساطة والجمال في المعرفة الرياضية تُسهم بشكل مباشر في تشكيل ممارساتهن التدريسية والإشرافية، مما يُبرز أهمية هذه التصورات في تحسين العملية التعليمية داخل الصفوف الدراسية، ورغم أن كلا الفئتين تُظهران وعيًا بأهمية هذه التصورات في تنظيم المعرفة وتقديمها؛ إلا أن تحليل البيانات يُبرز اختلافًا في عمق هذه التصورات ومرتكزاتها بين المجموعتين.

في حين تُظهر النتائج أن اختيار الأمثلة يُمثل انعكاسًا واضحًا لتصورات المعلمات والمشرفات حول البساطة والجمال؛ فقد ركّزت المعلمات على استخدام أمثلة واضحة تُظهر جمال المفاهيم ببراهين أنيقة، كما في قول م2: "استخدام أمثلة واضحة"، وم3: "اختيار أمثلة توضّح جمال الأشكال الرياضية"، و"تقديم البراهين الأنيقة تجعل الطلاب يُقدّرون الجمال الرياضي". ويتسق هذا مع ما أشار إليه عبيدة (2013) حول دور الجمال في التغلب على صعوبات المحتوى. وفي المقابل أظهرت المشرفات وعيًا أعمق؛ من حيث إبراز أمثلة واقعية تُوضّح العلاقة بين الرياضيات والحياة، كما قالت ش3: "تقديم أمثلة يومية تُظهر البساطة"، وش2: "ربط المفاهيم بالحياة"، وهذا ما أشارت إليه دراسة **برينكمان** (Brinkmann, 2009)، حيث أكّدت أن التقديرات الجمالية للمشكلات الرياضية تتأثّر بعوامل، منها التطبيقات الواقعية المرتبطة بالمفهوم.

كما أبرزت النتائج أن النقاشات الصفية وتنويع الاستراتيجيات يُمثّلان انعكاسًا لتصورات المعلمات حول البساطة والجمال في الرياضيات؛ إذ رأت م3 أن "الجمال في المسائل إذا كانت وسيلة حوار"، مما يتفق مع محمد (2007) الذي أكد دور النقاش في توجيه التفكير نحو الحلول البسيطة والأنيقة. كما ربطت المعلمات بين البساطة وتدرج عرض المفاهيم لتيسير الفهم، وبين الجمال وتحفيز الإبداع، حيث ذكرت م5 أهمية "استمطار الأفكار باستخدام استراتيجيات متعددة منها العصف الذهني"، وعبّرت م2 عن أن "اقتراح الطالبة مسائل هو الجمال"، وأكدت م1 أن "التنوع في الاستراتيجيات يُحفّز الطالبات"، مما يعكس وعيًا بأثر البساطة والجمال في دعم التفكير الإبداعي وربط المفاهيم بطريقة جذابة.

من جانب آخر ركّزت المشرفات على إبراز الجمال عبر استراتيجيات متقدمة، كتوظيف التقنية والتمثيل البصري، كما في قول ش3: "استخدام البرمجيات والرسوم البيانية"، إلى جانب تحفيز التفكير الإبداعي وربط المعرفة الجديدة بالسابقة، كما ذكرت ش2: "ربط المعرفة القبلية بالمفاهيم الجديدة"، وش3: "تدريب المعلمات على التفكير بأنواعه المختلفة"، وهو ما يتماشى مع الأدبيات التي تؤكد دور التقنية في دعم الإبداع والفهم العميق.

كما كشفت النتائج أن تصوّرات البساطة والجمال توجّه فعليًا الممارسات التعليمية؛ إذ ركّزت المعلمات على تبسيط المفاهيم عبر أمثلة واضحة واستراتيجيات مباشرة، بينما ركّزت المشرفات إبراز البنى الهيكلية والعلاقات المفاهيمية الأوسع، وذلك بدعم المعلمات وتوجيههن لاستراتيجيات تُبرز البساطة والجمال بوصفهما عنصرين متكاملين في تدريس المفاهيم الرياضية، ويعكس هذا التمايز اختلافًا في طبيعة الأدوار بين التنفيذ التربوي والدعم الإشرافي في بناء تجربة تعليمية متكاملة.

وتُفسَّر هذه النتائج في ضوء عدد من العوامل المتداخلة؛ من أبرزها ما تُشير إليه من تفاوت في عمق

تصـوّرات المشـاركات لمفهـومي البسـاطة والجمـال، لا سـيما فيمـا يتعلّـق بفهـم الجمـال بوصـفه مرتبطًـا بجوانـب بنيويـة وتكامليـة ضمن البنـاء الرياضي. وقـد يُعـزَى هـذا التفـاوت إلى محدوديـة فـرص التـدريب المتخصـص على توظيـف هـذين المفهـومين كمـداخل تربوية لتعزيز الفهم المفاهيمي العميق للرياضيات. وفي هـذا السـياق أشـار عبيـدة (2013) إلى أهميـة تطـوير برامج تدريبية نوعية تمكّن المعلمين من إدراك الأبعاد الجماليـة للمعرفـة الرياضـية وتفعيلهـا بفاعليـة في ممارسات التعليم والتعلّم.

عـلاوةً على ذلـك قـد يعـود هـذا التفـاوت إلى ضـعف تضـمين معـايير الجمـال في المنـاهج الدراسـية، مما يحدّ من قدرة المعلمات والمشرفات على التأمل في الأنشطة التي تنمي تصوّرهن وتتيح لهن ممارستها. فقد أشارت دراسة الخزيم والوهبي (Alkhuzaim & Alwahbi, 2023) إلى أن المناهج السعودية تعاني من ضعف في تضمين الجوانب الجمالية؛ نتيجة التركيز المفرط على الجوانب المعرفية والمهارية، مما يستدعي تعزيز هذا الجانب لدعم التعليم المتوازن والشامل. كما أن برامج إعداد المعلمين -في صورتها الحالية- لا تمنح المعلمين فرصا كافية لتكوين تصوّرات شاملة ومترابطة حول البساطة والجمال في المعرفة الرياضية، مما يُضعف من فاعليتهم في توظيفها داخل الصف الدراسي أو في الممارسات الإشرافية.

التوصيات

استنادًا إلى نتائج البحث؛ يوصي الباحثان بما يلي:

- تنظيم ورش عمل وبرامج تدريبية لمشرفي ومعلمي الرياضيات تُبرز دور الجمال والبساطة في تحسين الفهم العميق للمفاهيم الرياضية، وتعزيز الإبداع والتفكير النقدي لدى الطلاب.
- تمكين مشرفي الرياضيات ومعلميها من تصميم أنشطة تعليمية، تُبرز جمال المعرفة الرياضية وبساطتها، مما يعزّز التفكير الإبداعي والتأمُّل الرياضي لدى الطلاب.

المقترحات

بناء على نتائج البحث؛ يقترح الباحثان الآتي:

- إجراء بحوث مستفيضة حول تأثير توظيف البساطة والجمال في تحسين التحصيل الرياضي وتغيير اتجاهاتهم نحو الرياضيات.
- إجراء بحوث لاستكشاف تصوُّرات الطلاب حول البساطة والجمال الرياضي، وكيفية تأثيرها على فهمهم واستيعابهم للمفاهيم.

قيود البحث

شارك في البحث عينة قصدية من ثلاث مشرفات وخمس معلمات رياضيات في المرحلة الثانوية من إدارة تعليمية واحدة، ما يحد من تعميم النتائج على مجتمع مشرفي ومعلمي الرياضيات في المراحل والإدارات الأخرى. كما لم يُراعَ التنوع في الجنس؛ إذ اقتصر البحث على آراء المشرفات والمعلمات فقط في تصوّراتهن حول البساطة والجمال في المعرفة الرياضية، دون إشراك أطراف أخرى كصُنّاع القرار، الذين قد يسهم تكامل آرائهم في تحقيق فهمًا أعمق لطبيعة تلك المفاهيم. ومع هذه القيود قدّم البحث تفسيرات ثرية تُعد أساسًا لدراسات لاحقة.

المراجع

أولًا: المراجع العربية

بينجامين، آرثر. (2019). *سحر الرياضيات* (ترجمة: محمد النذير). دار جامعة الملك سعود. (نُشر العمل الأصلي 2015).

الشربيني، فوزي. (2005). التربية الجمالية بمناهج التعليم. *المؤتمر العلمي التاسع: معوقات التربية العلمية في الوطن العربي التشخيص والحلول*، (1)، الإسماعيلية: الجمعية المصرية للتربية العلمية، 95 – 109.

العبد الكريم، راشد. (2020). *البحث النوعي في التربية* (ط.3). مكتبة الرشد ناشرون.

عبد الهادي، أشرف. (2014). برنامج قائم على المدخل الجمالي في الرياضيات لتنمية التفكير الابتكاري ومهارات التفكير الرياضي لدي تلاميذ الحلقة الأولي من التعليم الأساسي. *مجلة القراءة والمعرفة*، (149)، 61-78.

عبيدة، ناصر. (2013). تقييم واقع توظيف مكونات جمال الرياضيات في التدريس من وجهة نظر معلمي المرحلة الثانوية. *المجلة التربوية، 27*(108)، 375- 424.

عطية، محسن. (1996). *غاية الفن: دراسة فلسفية ونقدية*. دار المعارف.

عمر، أحمد. (2008). *معجم اللغة العربية المعاصرة*. عالم الكتب.

المالكي، مفرح والمالكي، يحي. (2018). المعرفة الرياضية المفاهيمية والإجرائية لدى طلاب وطالبات الصف الثالث ثانوي. *مجلة رسالة التربية وعلم النفس*، (59)، 87-107.

محمد، جمال. (2007). دراسة لتذوق الطلاب المعلمين لجماليات الرياضيات، في ضوء معايير الجمال الرياضي لدى أعضاء هيئة التدريس ومعلمي وموجهي الرياضيات. *مجلة كلية التربية، 23*(2)، 129-202.

مقدم، عبد الحفيظ. (2015). *مناهج البحث العلمي في العلوم الاجتماعية والتربوية والنفسية*. دار النشر الدولي.

النذير، محمد. (2020). *فلسفة تعليم الرياضيات: منظور إبستمولوجي*. مطابع طيف إدراك.

هوندرتش، تيد. (2003). *دليل أكسفورد للفلسفة* (ترجمة: نجيب الحصادي). المكتب الوطني للبحث والتطوير. (نُشر العمل الأصلي 1995).

ثانيًا: المراجع الأجنبية

‘Abd al-Hādī, A. (2014). Barnāmaj qā’im ‘alá al-Madkhal al-jamālī fī al-riyāḍīyāt li-Tanmiyat al-tafkīr al-ibtikārī wa-mahārāt al-tafkīr al-riyāḍī ladá talāmīdh al-ḥalaqah al-ūlá min al-Ta‘līm al-asāsī. *Majallat al-qirā’ah wa-al-ma‘rifah*, ‘ (149), 61-78.

al-‘Abd al-Karīm, R. (2020). *al-Baḥth al-naw‘ī fī al-Tarbiyah* (ṭ3). Maktabat al-Rushd Nāshirūn.

Alkhuzaim, K. M., & Alwahbi, T. A. (2024). The availability level of the aesthetic approach in mathematics textbooks for the higher grades at the primary stage in Saudi Arabia. *Athens Journal of Sciences, 10*(4), 241-260.

al-Mālikī, M., &-al-Mālikī, Y. (2018). al-Ma‘rifah al-riyāḍīyah al-mafāhīmīyah wa-al-ijrā’īyah ladá ṭullāb wa-ṭālibāt al-ṣaff al-thālith thānawī. *Majallat Risālat al-Tarbiyah wa-‘ilm al-nafs*, ‘ (59), 87-107.

al-Nadhīr, M. (2020). *Falsafat Ta‘līm al-riyāḍīyāt : manẓūr ibstmwlwjy*. Maṭābi‘ Ṭayf idrāk.

al-Shirbīnī, F. (2005). al-Tarbiyah al-Jamālīyah bi-manāhij al-Ta‘līm. *al-Mu’tamar al-‘Ilmī al-tāsi‘-Mu‘awwiqāt al-Tarbiyah al-‘Ilmīyah fī al-waṭan al-‘Arabī al-tashkhīṣ wa-al-ḥulūl, Majj* (1), al-Ismā‘īlīyah : al-Jam‘īyah al-Miṣrīyah lil-Tarbiyah al-‘Ilmīyah, 95 – 109.

‘Aṭīyah, M. (1996). *Ghāyat al-fann : dirāsah falsafīyah wa-naqdīyah*. Dār al-Ma‘ārif.

Bell, J. L. (2015). Reflections on mathematics and aesthetics. *Aisthesis. Pratiche, linguaggi e saperi dell’estetico, 8*(1), 159–179.

Benjamin, A. (2019). *Magic of Math*. Basic Books.

Bisson, M. J., Gilmore, C., Inglis, M., & Jones, I. (2016). Measuring conceptual understanding using comparative judgement. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*(2), 141–164.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77–101.

Breitenbach, A. (2015). Beauty in proofs: Kant on aesthetics in mathematics. *European Journal of Philosophy, 23*(4), 955–977.

Breitenbach, A., & Rizza, D. (2018). Introduction to special issue: Aesthetics in mathematics. *Philosophia Mathematica, 26*(2), 153–160.

Brinkmann, A. (2000, June). Aesthetics–Complexity–Pragmaticm Information. *Research on Mathematical Beliefs: Proceedings of the MAVI-9 European Workshop* (18-23).

Brinkmann, A. (2009). Mathematical beauty and its characteristics: A study on the student's point of view. *The Mathematics Enthusiast, 6*(3), 365–380.

Brown, J. (2017). Teachers' perspectives of changes in their practice during a technology in mathematics education research project. *Teaching And Teacher Education*, (64), 52-65.

Chatterjee, A., & Vartanian, O. (2014). Neuroaesthetics. *Trends in Cognitive Sciences, 18*(7), 370–375.

Chen, R. J. (2017). Prospective elementary teachers’ aesthetic experience and relationships to mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, (20), 207–230.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Emmer, M. (Ed.). (2005). *The visual mind II*. MIT Press.

Fang, L., Kong, J., Chen, R., & Pang, L. (2023). Analysis of the Application of

mathematical proof. In M. Emmer (Ed.), *The Visual Mind II* (293–312). MIT Press.

Muḥammad, J. (2007). dirāsah ltdhwq al-ṭullāb al-Muʻallimīn ljmālyāt al-riyāḍīyāt, fī ḍaw' maʻāyīr al-Jammāl al-riyāḍī ladá aʻḍā' Hay'at al-tadrīs wmʻlmy wmwjhy al-riyāḍīyāt. *Majallat Kullīyat al-Tarbiyah*, *23*(2), 129-202.

Muqaddam, ʻA. (2015). *Manāhij al-Baḥth al-ʻIlmī fī al-ʻUlūm al-ijtimāʻīyah wa-al-tarbawīyah wa-al-nafsīyah*. Dār al-Nashr al-dawlī.

Nunez, R. E. (2005). Creating mathematical infinities: Metaphor, blending, and the beauty of transfinite cardinals. *Journal of Pragmatics*, *37*(10),1717-1741..

Patterson, C. L., Parrott, A., & Belnap, J. (2020). Strategies for assessing mathematical knowledge for teaching in mathematics content courses. *The Mathematics Enthusiast*, *17*(2), 807-842.

Poincaré, H. (1905). *La valeur de la science* (French Edition). Flammarion. Retrieved from https://classiques.uqam.ca/classiques/poincare_henri/valeur_de_la_science/valeur_de_la_science.pdf

Richman, F. (1999). Is 0.999…= 1?. *Mathematics Magazine*, *72*(5),396-400.

Russell, B. (1918). *The study of mathematics*. In *Mysticism and logic and other essays* (pp. 60–73). London: George Allen & Unwin.

Sa, R., Alcock, L., Inglis, M., & Tanswell, F. S. (2024). Do mathematicians agree about mathematical beauty? *Review of Philosophy and Psychology*, *15*(1), 299–325.

Satyam, V. R. (2016). The importance of surprise in mathematical beauty. *Journal of Humanistic Mathematics*, *6*(1), 196–210.

Sinclair, N. (2004). The roles of the aesthetic in mathematical inquiry. *Mathematical thinking and learning*, *6*(3), 261-284.

Thiele, R. (2003). Hilbert's twenty-fourth problem. *American Mathematical Monthly, 110*(1), 1–24.

Thiele, R., & Wos, L. (2002). Hilbert's twenty-fourth problem. *Journal of Automated Reasoning*, (29), 67–89.

Thurstone, L. L. (1994). A law of comparative judgment. *Psychological Review, 101*(2), 266–270.

ʻUbaydah, N. (2013). Taqyīm wāqiʻ Tawẓīf Mukawwināt Jamāl al-riyāḍīyāt fī al-tadrīs min wijhat naẓar Muʻallimī al-marḥalah al-thānawīyah. *al-Majallah al-Tarbawīyah, 27*(108), 375-424.

ʻUmar, A. (2008). *Muʻjam al-lughah al-ʻArabīyah al-muʻāṣirah*. ʻĀlam al-Kutub.

Mathematical Beauty in Middle School Mathematics Teaching. *International Journal of Scientific Engineering and Science*, *7*(11), 21-24

Hardy, G. H. (2012). *A Mathematician's Apology*. Canto Classics Edition. Cambridge University Press. Introduction by C. P. Snow.

Hayn-Leichsenring, G. U., Vartanian, O., & Chatterjee, A. (2022). The role of expertise in the aesthetic evaluation of mathematical equations. *Psychological Research*, *86*(5), 1655–1664.

Hersh, R. (2013). *Experiencing mathematics: What do we do, when we do mathematics?* (83). American Mathematical Society.

Hossenfelder, S. (2018). *Lost in math: How beauty leads physics astray*. Hachette UK.

Hwndrtsh, T. (2003). *Dalīl Uksfūrd lil-falsafah* (tarjamat : Najīb al-Ḥaṣādī). al-Maktab al-Waṭanī lil-Baḥth wa-al-Taṭwīr. (nushr al-ʻamal al-aṣlī 1995).

Inglis, M., & Aberdein, A. (2015). Beauty is not simplicity: An analysis of mathematicians' proof appraisals. *Philosophia Mathematica*, *23*(1), 87.

Ivanova, M. (2020). *Henri Poincaré: A short intellectual biography*. Cambridge University Press.

Jevtić, F. D., Kostić, J., & Maksimović, K. (2024). *Reflecting on beauty: The aesthetics of mathematical discovery* (arXiv preprint arXiv:2405.05379).

Jones, I., Swan, M., & Pollitt, A. (2019). Assessing students' understanding using comparative judgment. *Educational Studies in Mathematics*, *100*(3), 251–271.

Koichu, B., Katz, E., & Berman, A. (2017). Stimulating student aesthetic response to mathematical problems by means of manipulating the extent of surprise. *The Journal of Mathematical Behavior*, (46), 42-57. 03

Kostić, J., & Vujosević, S. (2024). *Kurt Gödel and the logic of concepts* (arXiv preprint arXiv:2406.05442).

Larcombe, P. J. (2018). A few thoughts on the aesthetics of mathematics in research and teaching. *Palestine Journal of Mathematics*. *7*(1), 1-8.

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage Publications.

Lloyd, D. R. (2010). *Symmetry and beauty in Plato*. Symmetry, 2(2), 455–465.

McAllister, J. W. (2005). Mathematical beauty and the evolution of the standards of

Usiskin, Z. (2001). Content deserving to be a field. *The Mathematics Educator, 6*(1), 86–98.

Villegas-Reimers, E. (2003). *Teacher professional development: An international review of the literature*. (pp. 7-9). Paris: International institute for educational planning.

Wells, D. (1990). Are these the most beautiful? *The Mathematical Intelligencer, 12*(3), 37–41.

Youvan, D. C. (2024). *Towards a simpler and more elegant mathematics: Unifying frameworks and cognitive intuition*.

Zeki, S., Romaya, J. P., Benincasa, D. M., & Atiyah, M. F. (2014). The experience of mathematical beauty and its neural correlates. *Frontiers in Human Neuroscience*, (8), Article 68.

Zimmerman, A. S. (2018). Helping early-career teachers to see the aesthetic dimension of mathematics within standards-based curricula. *Curriculum & Teaching Dialogue*, (20), 29-52.