

هيا الصبيح؛ محمد النذير: أثر تدريس وحدات تعليمية مقترحة في الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي لدى طالبات ...

## أثر تدريس وحدات تعليمية مقترحة في الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي لدى طالبات المرحلة الثانوية

أ.هيا بنت ناصر الصبيح<sup>(1)</sup> أ.د. محمد بن عبدالله النذير<sup>(2)</sup>

(قدم للنشر 1445/02/10 هـ - وقبل 1445/08/26 هـ)

المستخلص: هدف البحث إلى الكشف عن أثر تدريس وحدات تعليمية مقترحة في الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي لدى طالبات المرحلة الثانوية، استخدم منهج البحث التجريبي بتصميمه شبه التجريبي ذي المجموعة الواحدة مع قياسين قبلي وبعدي، وتكونت العينة قصدياً من (29) طالبة، واستخدم في البحث اختبار التفكير الهندسي لفان هيل، وقد أظهرت النتائج وجود فرق دال إحصائياً بين تكرارات عينة البحث في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الهندسي لصالح التطبيق البعدي في جميع مستويات التفكير الهندسي (التصور، والتحليل، والاستدلال شبه الرسمي، والاستدلال الرسمي، والصرامة).  
الكلمات المفتاحية: وحدات تعليمية مقترحة، الهندسة غير الإقليدية، التفكير الهندسي، المرحلة الثانوية.

### The Effect of Teaching Proposed Educational Units in non-Euclidean Geometry in Developing Geometric Thinking among Female Secondary School Students

Haya N. Alsubaih<sup>(1)</sup>

Mohammed A. Alnatheer<sup>(2)</sup>

(Submitted 21-01-2024 and Accepted on 07-03-2024)

**Abstract:** The research aimed to investigate the impact a proposed Educational Units in non-Euclidean Geometry in Developing Geometric Thinking among Female Secondary School Students. The research has been used the experimental method with its quasi-experimental one-group design with pre- and post-measurement. The sample consisted of (29) female students who were selected as purposive sampling. The Van Hiele Geometric Thinking Test was used in the research, and the results showed that there was a statistically significant difference between the frequencies of the research sample in the pre- and post-applications of the Geometric Thinking Test in favor of the post-application at all levels of Geometric thinking (Visualization, analysis, Informal Deduction, Deduction, rigor).

**Keywords:** Proposed Educational Units, The non-Euclidean geometry, geometric thinking, secondary school.

(1) PhD student - College of Education, King Saud University

(2) Professor of Curriculum and Mathematics Education - College of Education - King Saud University

(1) طالبة دكتوراه - كلية التربية جامعة الملك سعود

(2) أستاذ المناهج وتعليم الرياضيات - كلية التربية - جامعة الملك سعود

[ihaya99@gmail.com](mailto:ihaya99@gmail.com)

[m\\_alnatheer@yahoo.com](mailto:m_alnatheer@yahoo.com)

## مقدمة

الإقليدية، فيرى الطلاب كيف تؤدي البدهيات والتعريفات الأساسية إلى الاختلاف، وفي كثير من الأحيان إلى نتائج متناقضة. كما أن تعريفهم بالهندسة غير الإقليدية يساهم في تحقيق أحد معايير العمليات (2000) NCTM وهو معيار "الترباط".

ويمكن عبر دراسة الهندسة غير الإقليدية تحقيق ممارسات الرياضيات في المعايير الأساسية المشتركة للرياضيات (Common Core State Standards for Mathematics [CCSSM 2010]؛ حيث يتجلى فيها بوضوح "النمذجة باستخدام الرياضيات" و"البحث عن البنية والاستفادة منها".

كما يمكن لدراسة الهندسة غير الإقليدية المساهمة في توسيع فهم الهندسة الإقليدية (Buda, 2019; Athanasio, 2017)، ويؤكد ذلك ما توصل له دامك وآخرون (Damcke et al, 2008) من أن المعلمين الذين أكملوا دورة الهندسة غير الإقليدية؛ أفادوا بفهم أفضل لدور المعارف واللامعارف في الهندسة. وفي الهندسة غير الإقليدية، تعمل المفاهيم والأفكار الأساسية باندماج مع قضايا العالم الحقيقي، وليس فحسب مع مواقف افتراضية؛ مما يجعل التعلم ذا معنى، ولهذا فإن للهندسة غير الإقليدية استخدامات على نطاق واسع في جميع فروع الرياضيات. ولها تطبيقات كثيرة في العلوم الطبيعية والتصميم وغيرها (Andrade, 2011).

وذكرت أبو عميرة (2000) أن الاتجاه نحو إثراء المعرفة الرياضية هو أحد الاتجاهات الحديثة في تعليم الرياضيات، وذكر منها التركيز على الهندسة غير الإقليدية، وقد ظهرت توصيات في ندوات ومؤتمرات بتدريسها في التعليم العام؛ كما في المؤتمر الدولي الثامن لتعليم الرياضيات ICME8 الذي نظّمته اللجنة الدولية للتعليم الرياضي The International Commission on Mathematical Instruction [ICMI] والمنعقد في اسبانيا (1996)، دُكر فيه أن من

أبرز التطور العلمي اليوم الدور الفعّال والمؤثر للرياضيات في مختلف نواحي الحياة، كما أن نمو المعرفة الرياضية بشكل خاص وتعدد فروعها أدى لظهور مجالات جديدة لتطبيقات الرياضيات، وفي الوقت نفسه فرض تحديات أمام تعلمها وتعليمها للتطوير والتجديد في محتواها لمسيرة التطور الحادث فيها.

وتعد الهندسة أحد أهم المجالات الأساسية لمحتوى الرياضيات المدرسية وفقاً لمعايير المحتوى في وثيقة "معايير ومبادئ الرياضيات المدرسية" التي أصدرها المجلس الوطني لتعليم الرياضيات في أمريكا (National Council of Teachers Mathematics [NCTM 2000])، إذ أكدت الوثيقة على أهمية الأفكار الهندسية في تمثيل وحل المشكلات في مجالات أخرى من الرياضيات وفي مواقف العالم الحقيقي.

وبصفة عامة تُقدّم الهندسة في المدارس بناءً على مفاهيم الهندسة الإقليدية، التي غالبًا لا تكفي لتفسير كثير من الظواهر الحديثة، وبخاصة تلك التي تتضمن قياسات متناهية في الصغر، أو قياسات متناهية في الكبر؛ لأنها بُنيت على أساس أن الكون مسطح، وبالنظر إلى تاريخ الرياضيات كانت محاولة إثبات المسلمة الخامسة لإقليدس هي التي أدت إلى التطور الكبير للرياضيات في القرنين الأخيرين (Carvalho & Tucci, 2011; Ambrozi et al, 2015). عبر اكتشاف هندسات جديدة غير إقليدية؛ من المهم للطالب استكشاف مفاهيمها؛ لأنها تعمل على اتساع أفقه المعرفي، بل تعمق تعلم الهندسة بعامة (Athanasio, 2019).

وقد أكد المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات (NCTM, 1989) في وثيقة "معايير المنهج والتقييم للرياضيات المدرسية" على ضرورة تطوير فهم نظام بدهي وذلك بدراسة ومقارنة الهندسة الإقليدية وغير

هيا الصبيح؛ محمد النذير: أثر تدريس وحدات تعليمية مقترحة في الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي لدى طالبات ...

التعليم أكثر من اعتماده على النضج البيولوجي، وأن أنواع الخبرات التعليمية يمكن أن تعزز التطور أو تعرقله (Hiele, 1999)، ويذكر فيش (Fish, 1996) أن معظم الباحثين أهملوا المستوى الخامس في نموذج فان هيل؛ نظرًا لأن معظم الأنشطة الهندسية تُعرض في المستوى الرابع. وأيضًا لكون المحتوى واستراتيجيات التدريس المطبقة هي المؤثرة في التقدم من مستوى لآخر، ويعتقد أنه يمكن لدراسة الهندسة غير الإقليدية أن تسهل التقدم إلى المستوى الخامس من مستويات فان هيل لتنمية التفكير الهندسي.

#### مشكلة البحث

تولي الرياضيات المدرسية اهتمامًا خاصًا بتنمية التفكير باعتباره من أهم نواتج تعلم الرياضيات، إلا أن بعض الدراسات كشفت عن وجود ضعف في مستويات التفكير الهندسي بعامة لدى الطلاب في مراحل التعليم العام محليًا وعالميًا (Mateya, 2008؛ الجني، 2016؛ حسين، 2017؛ المغربي، 2018).

وأظهرت نتائج دراسة العتيبي (2019) عدم توافق موضوعات الهندسة في كتب المرحلة المتوسطة مع التدرج الهرمي لمستويات فان هيل للتفكير الهندسي. كذلك حصول طلاب المملكة العربية السعودية على ترتيب متدن حسب دراسة التوجهات الدولية في العلوم والرياضيات [TIMSS]؛ حيث كان أقل بكثير من المتوسط العالمي في جميع الدورات التي شاركت فيها المملكة International Association for the Evaluation of Educational Achievement [IEA]، (2019) وقد كان متوسط تحصيل الطلاب في مجال الهندسة أقل من متوسطات التحصيل في المجالات الأخرى في كل من الصفين الرابع والثامن؛ مما يقتضي التركيز على هذا المجال من الرياضيات. في حين ظهرت مستويات مجالات البعد المعرفي لدى طلاب الصف الثامن بدرجة منخفضة في مستوى الاستدلال، كما أن هناك اتساقًا بين نتائج الطلاب في الاختبارات الدولية

أهم التوجهات المستقبلية هو التوسع في الهندسات غير الإقليدية، وفي الندوة الدولية لتعليم الرياضيات بالولايات المتحدة الأمريكية (ICMI, 1997) التي هدفت للوصول إلى رؤى عن تدريس الرياضيات للقرن الحادي والعشرين أوصت بإعداد وحدات تعليمية في الهندسات غير الإقليدية لطلاب السنوات الأخيرة من التعليم الثانوي. كما أوصت دراسات كل من: أندراد (Andrade, 2011) وبودا (Buda, 2017) بضرورة تضمين الهندسات الجديدة في جميع المراحل التعليمية.

وتعمل الهندسة بعامة على تنمية التفكير الرياضي الذي يعد من أهم نواتج تعلم الرياضيات، فتعلمها يُسهم بوضوح في تطوير الطلاب لمهارات التصور والتفكير الناقد والحدس وحل المشكلات والتخمين والتفكير الاستنباطي والحجج المنطقية والبرهان (Jones, 2002)، كما تُمكن من فهم عدد من المفاهيم الرياضية،

ويُعد التفكير الهندسي أحد أنماط التفكير الرياضي المرتبط بالهندسة، وتؤكد خضر (2019) أن تنمية التفكير الهندسي لدى الطلاب يزيد من دافعيتهم للتعلم، والإقبال على تعلم الموضوعات الرياضية الصعبة. وقد أُجري عدد من الدراسات لتنمية هذا النمط من التفكير بجميع مستويات التفكير الهندسي وفي جميع المراحل التعليمية، كدراسات كل من: التوبية (2015)، والدرواني والسلولي (2017)، وخضر (2019)، والبوسعيدي (2020)، وأبو مغيص (2020)، والزهراني (2021).

وأشار فان هيل إلى أن أحد أهم أسباب الصعوبات التي يواجهها الطلاب في دراسة الهندسة؛ هو عدم مراعاة مستويات التفكير الهندسي الحالية للطلاب، وبناء عليه طُوّر نموذجًا للتفكير الهندسي؛ مفادها أن التفكير الهندسي مكون من خمسة مستويات، وأن التطور من مستوى لآخر يعتمد على

الرياضيات المدرسية دون البحتة، ومنها ما ركز على التعليم غير الرسمي والأنشطة غير المنهجية (Damcke et al, 2008; Andrade, 2011; Carvalho, 2011; Lovis & Franco, 2015; Ambrozi et al, 2015; Buda, 2017; Athanasio, 2019) مما يستدعي الحاجة الماسة لتدريس الهندسة غير الإقليدية بصورة تلائم طلاب المرحلة الثانوية، ودراسة أثر ذلك على التفكير الهندسي.

بناءً على ما تقدم؛ تتحدد مشكلة البحث بالإجابة عن السؤال الآتي: ما أثر تدريس الوحدات التعليمية المقترحة في الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي لدى طالبات المرحلة الثانوية؟

#### أهداف البحث

هدف هذا البحث إلى معرفة أثر تدريس وحدات تعليمية مقترحة في الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي لدى طالبات المرحلة الثانوية.

#### أهمية البحث

كمنت أهمية البحث فيما يلي:

#### الأهمية النظرية

- يُعد البحث من البحوث الإقليمية النادرة التي تقدم محتوى جديد في الهندسة غير الإقليدية، كما أنه البحث الأول محلياً. مما يساهم في إثراء الأدب التربوي العربي.

- يقدم البحث محتوى معرفياً مناسباً للمرحلة الثانوية، يربط بين الرياضيات البحتة والرياضيات المدرسية، كما يحوي معالجة ملائمة لفلسفة وتاريخ الرياضيات في ظل ندرة الدراسات التي تعمل على هذا الربط وهذه المعالجة.

#### الأهمية التطبيقية

- يمكن لمصممي مناهج الرياضيات في المرحلة الثانوية الاستفادة من الوحدات التعليمية، وكيفية التركيز على السياق التاريخي والفلسفي.

وبين الاختبارات الوطنية التي أجرتها هيئة تقويم التعليم والتدريب في عام 2018؛ حيث كان المستوى في الرياضيات دون الحد الأدنى لدى أكثر من 50% من الطلاب في كل من الصفين الرابع والثامن، وكشفت نتائج الدراسة التقييمية لمشروع تطوير الرياضيات والعلوم الطبيعية أن متوسط درجات تحصيل الطلاب في الرياضيات للصف الثالث الثانوي هو الأقل من كل من الصفين السادس والثالث المتوسط (مركز التميز البحثي، 1436هـ)؛ مما يستدعي التركيز على المرحلة الثانوية والتفكير في سبل معالجة ضعف تحصيل الطلاب بها في الرياضيات.

وبالاتساق مع ما تقدم لاحظ الباحثان أثناء التدريس في المرحلة الثانوية تدني مستويات الطالبات في التفكير الهندسي؛ فالقليل منهن من يتجاوز المستوى الثالث من مستويات فان هيل؛ فهن على سبيل المثال يفهمن العلاقات بين الأشكال، ويستخدمن الإثبات غير الرسمي لتبرير الملحوظات والتحقق من الخصائص، ولكن لا يمكنهن تقديم إثبات رسمي، ولا يدركن دور البديهيات والتعاريف والنظريات في البرهنة. ومن ناحية أخرى فإن الدراسات التي تضمنت مستويات فان هيل للتفكير الهندسي المذكورة آنفاً؛ ركزت على المستويات الدنيا؛ في حين لم تتناول المستوى الخامس في الدراسات البحثية. وقد يكون لتدريس وحدات تعليمية مقترحة في سياق رياضي وتاريخي تستند إلى المسلمات في النظام الرياضي؛ أثراً إيجابياً في تنمية التفكير الهندسي لدى الطالبات.

وعلى الرغم من أهمية موضوع الهندسة غير الإقليدية، إلا أنه لم يكن هناك سوى ندرة من الأبحاث الدولية التي تناولته بالدراسة في رياضيات المرحلة الثانوية. حيث تمحورت الدراسات التي أمكن الحصول عليها حول المعرفة الرياضية المتعلقة بها، ودراسة الواقع ومدى ملاءمته لتطبيقها، ومنها ما ركز على الرياضيات البحتة دون المدرسية، ومنها ما ركز على

هيا الصبيح؛ محمد النذير: أثر تدريس وحدات تعليمية مقترحة في الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي لدى طالبات ...

مستويات التفكير الهندسي الآتية: التصور، والتحليل، والاستدلال غير الشكلي، والاستدلال الشكلي والتجريد (شحاتة والنجار، 2003)، ويُعرف إجرائيًا بأنه العملية العقلية التي تقوم بها طالبة الصف الثاني الثانوي عندما تواجه مشكلة هندسية أثناء تعلمها للوحدات التعليمية المقترحة، ولحلها تتطلب تحليل هذه المشكلة وإدراك العلاقات بين مكوناتها؛ لتنظيم وتركيب الخبرات السابقة لديها للوصول إلى حلول منطقية في ضوء مستويات Van Hiele للتفكير الهندسي، ويُقاس بالدرجة التي تحصل عليها الطالبة في اختبار التفكير الهندسي.

وحدات تعليمية مقترحة (Proposed Educational Units): تُعرف بأنها: دراسة مخطط لها مسبقًا، يقوم بها التلاميذ في صورة سلسلة من الأنشطة التعليمية المتنوعة تحت إشراف المعلم وتوجيهه (شحاتة والنجار، 2003)، وتُعرف إجرائيًا بأنها تنظيم خبرات التعلم من خلال أنشطة تعليمية في مجال الهندسة غير الإقليدية تزود طالبات الصف الثاني الثانوي بمعرفة وأداء معين لتنمية تفكيرهن الهندسي.

الهندسة غير الإقليدية (Non-Euclidean Geometry): يُعرفها كل من لوفيس وفرانكو بأنها الهندسات التي تنفي أيًا من مسلمات إقليدس (Lovis & Franco, 2015). وتُعرف إجرائيًا بأنها: نظام استنتاجي مبني على نفي أيًا من مسلمات إقليدس، مثل: الهندسة الكروية وهندسة سيارة الأجرة، والمناسبة لمحتوى منهج الصف الثاني الثانوي لتنمية التفكير الهندسي والرغبة المنتجة لدى الطالبات.

الإطار النظري والدراسات السابقة

أولاً: الهندسة غير الإقليدية (Non-Euclidean Geometry)

منذ أكثر من ألفي عام قام عالم الرياضيات اليوناني إقليدس بوضع الأساس للهندسة الأكثر تأثيراً في العالم حتى اليوم. وقد بنى هندسته على مسلمات قليلة

- تقدم الوحدات الدراسية محتوى إثرائياً جديداً مشرفي ومعلمي الرياضيات يمكنهم من خلاله التعرف على الهندسة غير الإقليدية وتقديمه لطلابهم.

- يقدم البحث إضافة للمعرفة الرياضية لدى الطالبات بإكسابهن المفاهيم والأفكار الأساسية في الهندسة غير الإقليدية.

- يمكن للباحثين الاستفادة من أداة البحث في قياس التفكير الهندسي.

حدود البحث

اقتصر البحث على الحدود الآتية:

الحد الموضوعي: اقتصر البحث على نوعين من الهندسات غير الإقليدية، هما: الهندسة الكروية وهندسة سيارة الأجرة؛ لمناسبتها للمرحلة العمرية. وقُدمت في وحدتين منفصلتين لاختلاف الموضوعين. كما قُدمت لطالبات الصف الثاني الثانوي؛ لأنه سبق لهن التعرض لمسلمات إقليدس في الصف الأول الثانوي، وللموازنة بين مجالات الرياضيات في محتوى الصفوف الأخيرة. وذلك في ضوء مستويات فان هيل الخمسة.

الحد الزمني: طُبّق البحث خلال العام الدراسي 1444هـ-الفصل الدراسي الثاني.

الحد المكاني: طُبّق البحث في المدرسة الثانوية (48) للبنات بمدينة الرياض.

مصطلحات البحث

تضمن البحث المصطلحات الآتية:

التفكير الهندسي (Geometric Thinking): يُعرف بأنه: شكل من أشكال التفكير أو النشاط العقلي الخاص بالهندسة الذي يعتمد على مجموعة من العمليات العقلية متمثلة في قدرة الطلاب على القيام بمجموعة من الأنشطة الخاصة بكل مستوى من

نظرية فيثاغورس (Damcke et al, 2008; Buda, 2017).

وتكمن أهمية دراسة الهندسة غير الإقليدية من الناحية النظرية في أنها تعطي تباينًا مفيدًا مع هندسة المرحلة الثانوية؛ حيث يمكن التعلم عن ماهية الشيء برؤية ما هو ليس كذلك، كما أنها تجلب التركيز الشديد على أهمية البدهيات؛ حيث أن التغيير في بدهية واحدة ينتج عنه هندسة جديدة تمامًا بتعاريف رياضية ونظريات مختلفة (Beam et al, 2017). ويضيف أثناسيو (Athanasio, 2019) أنه في الهندسة غير الإقليدية تتجلى العلاقة بين الرياضيات والحياة اليومية، مما يجعل تعليمها ضروريًا وليس مثيرًا للاهتمام فحسب، وأنه عند العمل في الهندسة غير الإقليدية فلا بد من عرض التعريفات والنظريات والبراهين للهندسة الإقليدية، وهذا يؤدي إلى مراجعة المفاهيم المتعلقة بالهندسة الإقليدية. مما يساعد أيضًا في توحيد البنية المعرفية للطلاب.

وفي دراسة دامك (Damcke et al, 2008) استخدمت الهندسة غير الإقليدية كوسيلة لتدريس الهندسة الإقليدية لمعلمي الروضة إلى الصف الثاني عشر، إذ قام البرنامج بتدريس الهندسة الكروية وهندسة الأجرة. وأفاد المعلمون بفهم أفضل لدور المعارف واللامعارف في الهندسة. كما أن دراسة هندسة سيارة الأجرة تساعد الطلاب على فهم ورسم الخرائط. ويمكن أن تساعد على استكشاف معنى عدد من المصطلحات الشائعة في الهندسة الإقليدية وإظهار طريقة مختلفة للنظر إلى أفكار مماثلة (Buda, 2017)، ويذكر اندراد (Andrade, 2011) أن فرص إدخال محتويات من أنظمة هندسية مختلفة-إقليدية وغير إقليدية-في المعرفة الهندسية المدرسية تهدف إلى تدريب الطلاب لهذا القرن. كما أنها تتيح لهم التعرف على نموذج رياضي جديد، فتعمل على تطوير الخيال والتفكير الهندسي لديهم (Ministry of Education of

العدد، ولكنها بدهية للغاية. وقد كانت إحدى المسلمات وهي مسلمة التوازي محل خلاف مع كثير من علماء الرياضيات عبر القرون، ونصها: "إذا عُلم مستقيم ونقطة لا تقع عليه، فإنه يوجد مستقيم وحيد يمر بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم"؛ حيث يرون أنها تختلف في شكلها وبنائها عن باقي المسلمات، وأن إقليدس ضمّنها كثير من الكلمات لوصفها. وشك بعضهم فيما إذا كانت هذه مسلمة أم هي أقرب للنظرية التي ينبغي برهانها بدلالة المسلمات الأخرى، وكل محاولاتهم انتهت بالفشل (Buda, 2017).

ولأكثر من ألفي عام سيطر عمل إقليدس على جميع جوانب الهندسة، بما في ذلك تدريسها. حتى جاء جاوس (Gauss) (1777-1855) الذي أدرك أن هذه المسلمة لا يمكن إثباتها بدلالة المسلمات الأخرى، ومن الممكن فرض مسلمات مخالفة للمسلمة الخامسة للحصول في كل مرة على هندسة جديدة، وأول من توصل لهندسات جديدة غير إقليدية هما: لوباتشيفسكي (Lobacheswky) وبولياي (Bolyai). وقد افترض كل منهما أنه يمكن رسم أكثر من موازي لمستقيم من نقطة خارج هذا المستقيم (Fish, 1996). ثم قام ريمان بفرض افتراض آخر مفاده أنه لا يمكن رسم موازي لمستقيم من نقطة تقع خارجه. وهذا أساس الهندسة الكروية (النذير، Damcke et al, 2020).

وفي القرن التاسع عشر مرت الهندسة بعدة تطورات، ومن الممكن اليوم تصنيف أكثر من (50) نوعًا منها (Jones, 2002). ويركز البحث الحالي على الهندسة الكروية وهندسة سيارة الأجرة، وقد طُورت الأخيرة من قبل مينكوسكي Minkowski في أواخر القرن التاسع عشر، وتعني الهندسة التي تستخدمها سيارات الأجرة في مدينة ذات شبكة مستطيلة من الشوارع. وفيها تُقاس المسافة بين موقعين بجمع المسافات الرأسية والأفقية بينهما، بدلًا من استخدام

هيا الصبيح؛ محمد النذير: أثر تدريس وحدات تعليمية مقترحة في الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي لدى طالبات ...

وجود خمسة مستويات رئيسة متتالية، هي (van Hiele, 1999):

المستوى الصفري (0): وهو المستوى البصري (Visualization)، الذي يبدأ بالتفكير غير اللفظي. وفيه يُدرك الطالب الأشكال الهندسية من خلال مظهرها.

المستوى (1): وهو مستوى التحليل (Analysis)، وفيه تُحلّل الأشكال الهندسية إلى مكوناتها، وإيجاد العلاقة بينها. ولا يُحكم على شيء لأنه يشبه آخر؛ بل لأنه يمتلك خصائص معينة.

المستوى (2): وهو مستوى الاستدلال غير الرسمي (Informal Deduction)، وفيه تُستنتج خصائص الأشكال الهندسية من بعضها بعضًا منطقيًا. ويستخدم الطلاب الخصائص لصياغة تعريفات، واستخدامها لتبرير العلاقات. ومع ذلك في هذا المستوى، لا يُفهم المعنى الجوهرى للاستدلال.

المستوى (3): وهو مستوى الاستدلال الرسمي (Deduction)، وفيه يفهم الطالب الاستدلال المجرد، فيستطيع رؤية العلاقات المتداخلة بين النظريات والمسلمات، ويكتب التخمينات، كما يتمكن من بناء البراهين الهندسية بالاعتماد على المسلمات والنظريات التي تعلّمها في المستوى السابق للوصول إلى نتيجة ما، وبأكثر من طريقة، ولكن لا يستطيع المقارنة بين الأنظمة الهندسية المختلفة، وهذا هو أعلى مستوى الهندسة الذي توفره المدرسة الثانوية.

المستوى (4) والأخير: وهو مستوى الصرامة (Rigor)، ويقع أعلى مستوى من التسلسل الهرمي لفان هيل، يكون مجال التركيز هو الأنظمة البديهية نفسها، وليس فقط ما بداخل النظام. ويكون الطالب قادرًا على إثبات الخصائص وإدراك الاختلافات بين أنظمة هندسية بديهية مختلفة.

ويذكر بيم وآخرون (Beam et al, 2017) أن مستويات فان هيل تتسم بأنها متسلسلة، ويجب على

(People's Republic of China, 2003)، أكدت ذلك دراسة بليز (Blair, 2004) التي هدفت لوصف التفكير لدى الطالب المعلم في الهندسة الإقليدية والكروية والأجرة من خلال مقارنة هذه الأنظمة الهندسية، وتوصلت النتائج إلى أن دراسة الهندسة غير الإقليدية تعزز فهم الطلاب للهندسة الإقليدية، وأن التفكير الهندسي للطلاب في الهندسة التقليدية يمكن أن يتوسع في الهندسات الأخرى.

وفي دراسة لواسرمان (Wasserman, 2009) أُدرجت وحدة في الهندسة الكروية في المرحلة الثانوية بكاليفورنيا. وأُعطي الطلاب اختبارًا لمقارنة التغيير في فهمهم للمفاهيم الإقليدية، كان عددهم (105) طالبًا من الصفوف التاسع والعاشر والحادي عشر، وأسفرت النتائج عن تأثير إيجابي للإدراج على فهم الطلاب للمفاهيم الإقليدية. وفي دراسة نوعية قام بها بروم وشوماكر (Brum & Schuhmacher, 2014) هدفت إلى تحليل استخدام الأنشطة المختلفة من خلال سلسلة تعليمية لتدريس الهندسة الكروية والزائدية، قُدمت لـ (14) طالبًا من الصف الثاني الثانوي في سانتا كاتارينا، طُبّق فيها اختباران قبلي وبعدي، وأظهرت النتائج تمكن معظم الطلاب من استيعاب وتمييز مفاهيم الهندسة الإقليدية والكروية والزائدية والتوفيق بينها.

فيما سبق، تم عرض مفهوم الهندسة غير الإقليدية، وتطورها التاريخي، وأنواعها، وإبراز أهمية تدريسها للطلاب.

#### ثانيًا: التفكير الهندسي (Geometric Thinking)

التفكير الهندسي هو أحد أشكال التفكير المرتبطة بالهندسة، وقد طُوّر نموذج فان هيل (Van Hiele) من قبل باحثين هما بيير فان هيل وزوجته في رسالتيهما الدكتوراه المقدمة عام (1957)، ويهتم هذا النموذج بمراحل تطور التفكير الهندسي، ويشير إلى

وهدفت دراسة العنزي (2019) إلى قياس أثر استراتيجيات السقالات التعليمية في تنمية التحصيل الرياضي والتفكير الهندسي ودافعية التعلم لدى طلاب الصف الثاني المتوسط، واستُخدم فيها المنهج التجريبي ذو المجموعتين، وتكونت العينة من (57) طالبًا من منطقة الحدود الشمالية، وكانت أدوات الدراسة هما: اختبار للتفكير الهندسي واختبار تحصيلي ومقياس الدافعية، وتوصلت الدراسة إلى وجود أثر إيجابي للاستراتيجية في تنمية التفكير الهندسي.

كما بحثت بعض الدراسات في تنمية التفكير الهندسي من خلال استخدام التقنية في التعليم، مثل: دراسة الدرواني والسلوي (2017) التي هدفت إلى الكشف عن أثر تدريس القطوع المخروطية باستخدام برمجيات الهندسة الديناميكية في تنمية التحصيل والتفكير الهندسي لدى طلاب المرحلة الثانوية في صنعاء، واستُخدم فيها المنهج التجريبي ذو المجموعتين، وتكونت العينة من (123) طالبًا، وكانت أدوات الدراسة هي: اختبار تحصيلي ومقياس التفكير الهندسي، وتوصلت الدراسة إلى وجود أثر إيجابي للبرمجية في تنمية التفكير الهندسي.

ومن أساليب تنمية التفكير الهندسي التدريس باستخدام استراتيجيات تفكير أخرى؛ حيث أثبتت دراسة الزهراني (2021) فاعلية استراتيجيات التفكير المتشعب في تنمية التحصيل الدراسي والتفكير الهندسي لدى طالبات المرحلة المتوسطة، واستخدمت المنهج التجريبي ذو المجموعتين، وكانت عينة الدراسة (46) طالبة، واستُخدم فيها أداتان هما: اختبار التفكير الهندسي واختبار تحصيلي، وأظهرت النتائج فاعلية استراتيجيات التفكير المتشعب في تنمية التحصيل الدراسي والتفكير الهندسي لدى طالبات المرحلة المتوسطة.

وفي دراسة قام بها نجريشي وبانسيلال (Ngirishi & Bansilal, 2019) أوضحوا فيها بعض الصعوبات التي

الطلاب التنقل عبر جميع المستويات بالترتيب نفسه، وهنا يتفق النموذج مع النظرية البنائية لبياجيه في أن المتعلم يبني تعلمه بناءً على خبراته السابقة، كما أن الخبرة التعليمية هي أكبر عامل مؤثر على التقدم عبر المستويات وليس العمر الزمني، ويتفق النموذج أيضا مع أفكار البنائية الاجتماعية لفيجوتسكي في أنه عندما يكون مستوى التعليم أو اللغة أعلى من مستوى الطالب فإنهما سيثبطان التعلم؛ لذا تبدو أهمية التفاعل اللغوي الاجتماعي في تكوين المعرفة.

وينعكس اكتساب الطلاب لمهارات التفكير الهندسي إيجابًا على تحصيلهم الدراسي مما يدعم تعلم الرياضيات وتعليمها داخل الصفوف الدراسية؛ ويؤكد ذلك دراسة الغامدي (2015) التي أسفرت نتائجها عن فاعلية استراتيجية التعلم المدمج في تدريس الهندسة على تنمية التفكير الهندسي لدى طلاب الصف الثاني المتوسط، وإلى وجود علاقة ارتباطية موجبة بين التحصيل والتفكير الهندسي، كما بيّنت دراستا كل من الجمني (2016) والمغربي (2018) التأثير الإيجابي للتفكير الهندسي في القدرة المكانية التي تعد أحد نواتج التعلم ذات الأثر البالغ في تحسين عمليتي التعليم والتعلم.

ومن الدراسات التي اهتمت بتنمية التفكير الهندسي دراسة المعافا (2022) التي هدفت إلى قياس أثر مقرر مقترح في الهندسة الكسورية وبرمجياتها في تنمية مهارات القرن الحادي والعشرين والتفكير الهندسي لدى طلبة قسم الرياضيات بجامعة صنعاء، واستُخدم فيها المنهج التجريبي ذو الثلاث مجموعات، وتكونت العينة من (96) طالبًا، وكانت أدوات الدراسة هي: اختبار للتفكير الهندسي ومقياس مهارات القرن الحادي والعشرين والملاحظة والمقابلة، وتوصلت الدراسة إلى وجود أثر إيجابي للمقرر المقترح في تنمية التفكير الهندسي.



هيا الصبيح؛ محمد النذير؛ أثر تدريس وحدات تعليمية مقترحة في الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي لدى طالبات ...

### مجتمع البحث

تكون مجتمع البحث من جميع طالبات الصف الثاني الثانوي في المدرسة الثانوية 48 للعام الدراسي 1444هـ، وعددهن (120) طالبة.

### عينة البحث

تكونت العينة من طالبات أحد فصول الصف الثاني الثانوي، وعددهن (29) طالبة، وتشكل 25% من المجتمع. وبالتنسيق مع إدارة المدرسة تم تعيين العشوائي للطالبات في الفصول مع بداية العام الدراسي.

### مواد البحث

لتحقيق هدف البحث؛ أعد الباحثان الوحدات التعليمية بمكونها: كتاب الطالبة ودليل المعلمة وفقاً للخطوات الآتية:

(1) الاطلاع على الدراسات والأدبيات السابقة والمراجع التخصصية المتعلقة بالهندسة غير الإقليدية، والاطلاع -أيضاً- على معايير ووثائق مناهج الرياضيات الدولية التي أمكن الحصول عليها، وتحليلها لجمع البيانات حول موضوعات الهندسة غير الإقليدية. ثم تبع ذلك إجراء مقابلات مركزة مع خبراء الرياضيات وخبراء تعليم الرياضيات ومعلمي ومشرفي الرياضيات بهدف الوصول إلى قائمة بالمعرفة الرياضية اللازمة والمناسبة للمرحلة الدراسية وأساليب تقديمها لبناء هذه الوحدات.

(2) إعداد وحدات دراسية مقترحة تتناول مواضيع الهندسة غير الإقليدية التي سبق تحديدها، تبعاً للخطوات الآتية:

- تحديد الهدف من إعداد الوحدات التعليمية وأسس بنائها: هدفت الوحدات التعليمية إلى تنمية التفكير الهندسي لدى طالبات الصف

تواجه الطلاب، واقترحا بعض الأساليب لحلها، وكان هدف الدراسة هو استكشاف إدراك مفاهيم الهندسة لطلاب المرحلة الثانوية بالاعتماد على مستويات فان هيل في التفكير الهندسي، واستخدم فيها المنهج النوعي، وكان المشاركون في البحث (147) طالباً من جنوب إفريقيا، وتكونت أدوات البحث من استبيانين ومقابلة، وأظهرت النتائج أن المتعلمين واجهوا صعوبات في المشكلات التي تحوي تعريفات للمصطلحات الهندسية، والعلاقات المتبادلة بين الخصائص والأشكال، والتمثيلات المتنوعة.

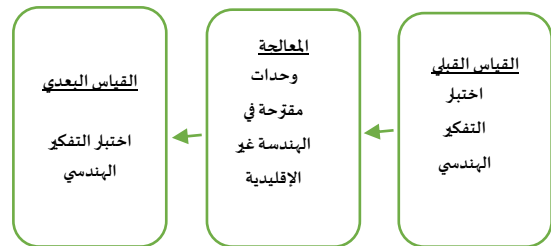
ومن الملاحظ تنوع أساليب الدراسات التي هدفت لتنمية التفكير الهندسي ما بين استخدام محتوى، أو استراتيجيات، أو تقنيات تعليمية، أو أنواع أخرى من التفكير.

فرض البحث: لا يوجد فرق دال إحصائياً عند مستوى الدلالة ( $\alpha < 0.05$ )، بين تكرارات عينة البحث في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الهندسي ككل.

### منهجية البحث وإجراءاته

### منهج البحث

استخدم البحث المنهج التجريبي بتصميمه شبه التجريبي ذي المجموعة الواحدة مع قياس قبلي وبعدي؛ لكونه الملائم لتحقيق هدف البحث، وهو معرفة أثر الوحدات التعليمية المقترحة (المتغير المستقل) في تنمية التفكير الهندسي (المتغير التابع)، ويوضح الشكل (1) التصميم شبه التجريبي للبحث.



شكل (1) التصميم شبه التجريبي للبحث

للتحقق من صلاحيتها وأهميتها ووضوحها وسلامة الصياغة اللغوية واقتراح حذف أو إضافة ما يرويه مناسباً.

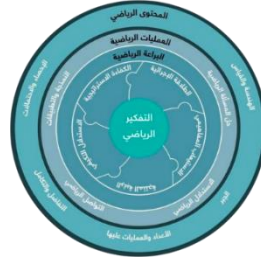
4) التقويم النهائي والتطوير: وبعد إعداد الصورة النهائية للوحدات، وإعداد بيئة التعلم؛ جُربت الوحدات التعليمية ميدانياً، وكانت المدة الزمنية للتجريب (24) حصة، موزعة خلال شهرين بواقع ثلاث حصص أسبوعياً. وكان تنفيذها من قبل أحد الباحثين في وقت حصص الإتقان الإثرائية التي يوفرها نظام المسارات. وأُجري التقويم النهائي للوحدات وتطويرها بعد تقديمها للطلبات من خلال المقابلة لتعرف آرائهن ومقترحاتهن لتطوير الوحدات، إضافة إلى التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الهندسي الذي أسهم في تقويم بعض جوانب الوحدات.

أداة البحث وضبطها علمياً

اختبار التفكير الهندسي: تم قياس التفكير الهندسي لدى الطالبات باستخدام المقياس الذي أشرف عليه كل من يوسيسكين Usiskin وإحدى طلابه في الدكتوراه في مشروع تطوير التحصيل المعرفي في هندسة المدارس الثانوية (Usiskin, 1982). وكان هدفه إعداد اختبار بأسئلة سهلة لكل مستوى؛ حيث لم تكن سهلة أو صعوبة الأسئلة معياراً في تصميمه. وقد تُرجم إلى العربية واستخدم في بيئات ثقافية مختلفة، وقننه العطاس (2015) على طلاب الصف الثاني الثانوي بالمملكة، ويتضمن (25) مفردة من نوع الاختيار من متعدد، كل خمسة أسئلة متتالية تُحدد مستوى من مستويات التفكير الهندسي لفان هيل (Van Helie) كالآتي:

- الأسئلة 1-5: تقيس المستوى 0 (البصري)
- الأسئلة 6-10: تقيس المستوى 1 (التحليل)

الثاني الثانوي، وارتكز الأساس المنطقي لها من: (1) المبادئ الصادرة عن هيئة تقويم التعليم والتدريب (2020) كما في شكل (2)، (2) نموذج فان هيل (1957)، (3) البنائية المعرفية لبياجيه والبنائية الاجتماعية لفيجوتسكي، وأخيراً (4) تاريخ تطور الهندسة غير الإقليدية.



شكل (2) بنية مجال تعلم الرياضيات (هيئة تقويم التعليم والتدريب، 2020)

- تصميم الوحدات: حُدِّت موضوعات الوحدات بمساعدة الخبراء، كما يلي: مقدمة في الهندسة الكروية وهندسة سيارة الأجرة، ثم صياغة نواتج تعلم الوحدات التعليمية، ثم حُدِّد المحتوى وأسلوب تنظيمه، ودمجت معايير العمليات (الاستدلال الرياضي، التواصل الرياضي، حل المسألة الرياضية، النمذجة والتطبيقات) في المحتوى مع التركيز على تنمية الخيال الرياضي، وبنيت الوحدات في ضوء مدخل الاكتشاف باستخدام استراتيجية فان هيل، وتم فيها التركيز على الأنشطة المقارنة بين الهندسة الإقليدية وغير الإقليدية، وأنشطة تحوي مشكلات واقعية. واستُخدمت المحسوسات اليدوية والبرمجيات والوسائط المتعددة.

3) إعداد كتاب الطالبة ودليل المعلمة: حُكِّمت الوحدات: بعرضها على عدد من المحكمين؛ وذلك

هيا الصبيح؛ محمد النذير: أثر تدريس وحدات تعليمية مقترحة في الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي لدى طالبات ...

الرياضيات، وأكدوا صدق الاختبار. ولم يُحذف أي سؤال من أسئلة الاختبار بما في ذلك أسئلة المستوى الخامس؛ وذلك للكشف عما إذا كان للوحدات المقترحة أثر في وصول الطالبات للمستوى الخامس أم لا.

وأعيد حساب الثبات والاتساق الداخلي للاختبار، وذلك بتطبيقه على عينة استطلاعية من الطالبات من غير المشاركات في عينة البحث مكونة من (30) طالبة من طالبات الصف الثاني الثانوي. مع التأكد من وضوح صياغة الأسئلة للطالبات، وتحديد الزمن المناسب للاختبار؛ وذلك بحساب متوسط الزمن المستغرق لأول خمس طالبات وآخر خمس طالبات، وبناءً عليه أُعتمد زمن تطبيق الاختبار (40) دقيقة.

واستُخدم معامل ارتباط بيرسون (Pearson) لحساب الاتساق الداخلي للمقياس وذلك بقياس العلاقة بين درجة كل عبارة والدرجة الكلية للبعد الذي تنتمي إليه، والعلاقة بين درجة كل بعد والدرجة الكلية للمقياس، وهي موضحة في الجدولين (1و2) الآتية:

- الأسئلة 11-15: تقيس المستوى 2 (الاستدلال غير الرسمي)
  - الأسئلة 16-20: تقيس المستوى 3 (الاستدلال الرسمي)
  - الأسئلة 21-25: تقيس المستوى 4 (الصرامة)
- ويتطلب الحل اختيار إجابة صحيحة واحدة من بين خمس إجابات محتملة.

وُروجعت إجراءات ضبط المقياس في دراسة العطاس (2015)؛ ودلالات الصدق والثبات ومدى اتساقها مع خصائص الاختبار الجيد في البيئة السعودية؛ وقد بلغ متوسط معاملات الصعوبة (0.67)، ومتوسط معاملات التمييز (0.66)، وكان مستوى تباين الفقرات (0.15) ولا يوجد أية فقرة قيمة التباين بها صفرًا، كما تمتعت جميع المفردات بأدلة صدق وثبات واتساق مرتفعة.

وقام الباحثان بإعادة ترجمته للغة العربية، وإجراء بعض التعديلات اللغوية، وتقنيته على العينة، مثل: تعديل صيغة المذكر إلى مؤنث. وللتأكد من دقة الترجمة، وسلامة اللغة، ومناسبة السياقات للطالبات، وللمعرفة الرياضية التي سبق لهن دراستها، وعُرض على مختصين في تعليم

جدول (1)

معاملات الارتباط بين فقرات المستوى والدرجة الكلية للمستوى

المستوى الخامس		المستوى الرابع		المستوى الثالث		المستوى الثاني		المستوى الأول	
معامل الارتباط	م	معامل الارتباط	م	معامل الارتباط	م	معامل الارتباط	م	معامل الارتباط	م
**0.48	1	**0.5	1	**0.6	1	**0.64	1	**0.59	1
**0.63	2	**0.7	2	**0.71	2	**0.51	2	**0.72	2
**0.59	3	**0.78	3	**0.48	3	**0.68	3	**0.49	3
**0.6	4	**0.73	4	**0.58	4	**0.64	4	**0.45	4
**0.56	5	**0.71	5	**0.6	5	**0.73	5	**0.6	5

الاتساق الداخلي بين فقرات الاختبار والمستوى الذي تنتمي إليه.

ويتضح من الجدول أن معاملات الارتباط بين الفقرات والدرجة الكلية للمستوى دال إحصائيًا عند مستوى الدلالة (0.01)، مما يشير إلى توافر

جدول (2)

معاملات الارتباط بين المستويات والدرجة الكلية للاختبار

المستويات	معامل الارتباط
المستوى الأول	**0.75
المستوى الثاني	**0.67
المستوى الثالث	**0.64
المستوى الرابع	**0.63
المستوى الخامس	**0.64

قامت بحل جميع الأسئلة كي لا تُستبعد أية ورقة إجابة.

ولتصحيح الاختبار رُمزت الإجابات لتصبح إما درجة (0) للإجابة الخطأ، أو درجة (1) للإجابة الصحيحة. ومن أجل تحديد مستوى التفكير الهندسي لكل طالبة؛ جُمعت إجابات الطالبة الخمس لكل مستوى وصُححت حسب المعايير الآتية:

- الحصول على ثلاث إجابات صحيحة من خمس كحد أدنى.

- تحقيق المستوى الأول شرط أساس ليتم تصنيف الطالبة على المستويات، وإلا تُعد الطالبة "غير مصنفة".

- تحقيق المستوى الأدنى لأي مستوى تالي. وعلى ذلك تكون أنماط الأداء الممكنة للطالبات كما هو موضح في جدول (4) الآتي:

جدول (4)

أنماط الأداء الممكنة للطالبات

نمط الأداء	النتيجة
(00000)	المستوى الصفري (دون الأول)
(00001)	المستوى الأول
(00011)	المستوى الثاني
(00111)	المستوى الثالث
(01111)	المستوى الرابع
(11111)	المستوى الخامس

ويتضح من الجدول أن معاملات الارتباط بين كل مستوى والدرجة الكلية للاختبار دال إحصائياً عند مستوى الدلالة (0.01)، مما يشير إلى توافر الاتساق الداخلي بين مستويات الاختبار والدرجة الكلية للاختبار.

أما ما يخص الثبات فقد استُخدم معامل ألفا كرونباخ (Alpha Cronbach's)، ويوضح الجدول (3) معامل ثبات كل محور من محاور الاختبار، ومعامل ثبات درجته الكلية.

جدول (3)

معاملات ثبات اختبار التفكير الهندسي

المستويات	عدد الفقرات	معامل الثبات
المستوى الأول	5	0,61
المستوى الثاني	5	0,69
المستوى الثالث	5	0,72
المستوى الرابع	5	0,75
المستوى الخامس	5	0.64
المستويات ككل	25	0,83

ويتضح من الجدول أن معامل الثبات بطريقة ألفا كرونباخ للمقياس بلغ (0,83). كما تراوحت قيم معاملات الثبات لأبعاد المقياس من (0,61-0,75) وهي نسب ثبات مقبولة.

وفي ضوء نتائج الدراسة الاستطلاعية اعتمدت الصورة النهائية للاختبار. وقُدّم الاختبار في كُتيب للطالبات، مصحوبًا بورقة للإجابة، تطلب إنجازها حصة دراسية كاملة، وفتُح المجال أمام الطالبات للاستفسار عما يشكل عليهن. مع التأكد أن الطالبة

هيا الصبيح؛ محمد النذير: أثر تدريس وحدات تعليمية مقترحة في الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي لدى طالبات ...

(5) تنفيذ التجربة وتطبيق الوحدات التعليمية على عينة البحث.

(6) إجراء القياس البعدي لأداة البحث.

(7) جمع البيانات ومعالجتها واستخراج النتائج للتحقق من فرض البحث، والتوصل إلى النتائج والتوصيات.

#### عرض نتائج البحث

أُجيب عن سؤال البحث بعد تطبيق اختبار التفكير الهندسي قبل تنفيذ التجربة، وبعد التنفيذ؛ وذلك لمقارنة نتائج القياسين القبلي والبعدي، واختبار صحة فرض البحث: "لا يوجد فرق دال إحصائياً عند مستوى الدلالة ( $\alpha < 0,05$ )، بين تكرارات عينة البحث في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الهندسي ككل".

واستخدم اختبار "كا<sup>2</sup>" للاستقلالية لمعرفة ما إذا كان هناك فروق دالة إحصائية بين تكرارات درجات الطالبات في القياسين القبلي والبعدي، وبين جدول (5) وشكل (3) نتائج الاختبار في القياسين القبلي والبعدي.

#### المعالجة الإحصائية

للإجابة عن السؤال تم اختبار صحة الفرض باستخدام الأساليب الإحصائية الآتية:

(1) اختبار "كا<sup>2</sup>" للاستقلالية لدراسة الفرق بين تكرارات درجات التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الهندسي.

(2) اختبار كرامر لدراسة حجم تأثير تدريس الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي لدى مجموعة البحث.

#### إجراءات البحث

أُنبعت الإجراءات الآتية:

(1) الحصول على الموافقات الرسمية لإجراء التجربة.

(2) تحديد مجتمع البحث قصدياً، والتعيين العشوائي لمجموعة البحث التجريبية.

(3) إعداد مواد البحث وأداته، وضبطها علمياً؛ بقياس الثبات والصدق على عينة خارج عينة البحث.

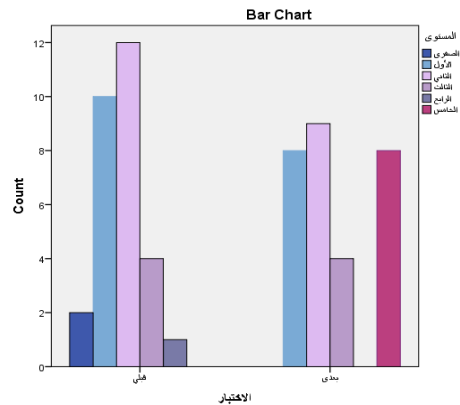
(4) إجراء القياس القبلي لأداة البحث.

#### جدول (5)

نتائج اختبار "كا<sup>2</sup>" لدلالة الفرق بين تكرارات درجات الطالبات في القياسين القبلي والبعدي

الدلالة	كا <sup>2</sup>	درجات الحرية	المجموع	مستويات التفكير						اختبار التفكير الهندسي	
				الخامس	الرابع	الثالث	الثاني	الأول	الصفري	تكرار	%
0.04	11.651	5	29	0	1	4	12	10	2	تكرار	
				0	3	14	41	35	7	%	
			29	8	0	4	9	8	0	تكرار	
				26	0	13	31	26	0	%	

ويتضح من الجدول (5) ومن الشكل (3) أن تكرارات الطالبات في مستويات التفكير الهندسي متفاوتة، ويمكن توضيحها كما يلي: في المستوى الصفري (دون الأول) يوجد طالبتان في الاختبار القبلي من بين (29) طالبة لم يتم تصنيفهن على أي مستوى؛ ولم يصلن للمستوى الأول (البصري) لعدم إجابتهما عن (3) أسئلة من (5) أسئلة المستوى الأول كحد أدنى، في حين أن جميع الطالبات في الاختبار



شكل (3): تكرارات الطالبات في مستويات التفكير الهندسي

الخامس (الصرامة) كحد أدنى، أي أنهم تجاوزن المستويات الأول والثاني، والثالث والرابع والخامس.

كما يتضح من الجدول (5) أن قيمة اختبار "كا<sup>2</sup>" بلغت (11.651)، وهي قيمة دالة احصائياً عند مستوى ( $\alpha \leq 0.05$ )، مما يؤكد وجود فرق ذي دلالة إحصائية عند مستوى أقل من (0.05) بين تكرارات درجات الطالبات في القياسين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الهندسي لدى الطالبات، وكان الفرق لصالح القياس البعدي؛ مما يشير إلى وجود أثر لتدريس الوحدات المقترحة في تنمية التفكير الهندسي لديهن.

ويوضح جدول (6) حجم تأثير الوحدات المقترحة في تنمية التفكير الهندسي لدى طالبات الصف الثاني الثانوي.

#### جدول (6)

حجم تأثير الوحدات المقترحة في تنمية التفكير الهندسي

مستوى الدلالة	معامل كرامر (Cramer's V)	كا <sup>2</sup>
0.04	0.77	11.651

ولحساب حجم التأثير استخدم معامل كرامر (Cramer's V)؛ لحساب قوة العلاقة بين تدريس الوحدات المقترحة ومستويات التفكير الهندسي، ويُعرف (Cramer's V) لجدول  $r \times c$  وحجم عينة  $N$  على أنه:

$$\sqrt{\frac{\chi^2}{N \text{ Min}(c - 1, r - 1)}}$$

وبلغت قيمته 0.77، وهي قيمة دالة احصائياً عند مستوى 0.05 كما في جدول (6)؛ مما يعني أن حجم تأثير وحدات الهندسة غير الإقليدية كبير في تنمية التفكير الهندسي لدى طالبات الصف الثاني الثانوي، حسب تصنيف كوهين (Cohen, 2013) الموضح في الجدول (7).

البعدي تم تصنيفهن على مستويات التفكير الهندسي الخمسة المختلفة.

وفي المستوى الأول (البصري) كان عدد الطالبات المصنفات في الاختبار القبلي (10) طالبات، مقابل (8) طالبات فقط في الاختبار البعدي، وهن الطالبات اللاتي أجبن عن (3) أسئلة من (5) أسئلة من المستوى الأول (البصري) كحد أدنى.

وفي المستوى الثاني (التحليل) كان عدد الطالبات المصنفات في الاختبار القبلي (12) طالبة، مقابل (9) طالبات فقط في الاختبار البعدي، وهن الطالبات اللاتي أجبن عن (3) أسئلة من (5) أسئلة من المستوى الثاني (التحليل) كحد أدنى، أي أنهم تجاوزن المستويين الأول والثاني.

وفي المستوى الثالث (الاستدلال غير الرسمي) كان عدد الطالبات المصنفات في الاختبار القبلي (4) طالبات، مقابل (4) طالبات في الاختبار البعدي، وهن الطالبات اللاتي أجبن عن (3) أسئلة من (5) أسئلة من أسئلة المستوى الثالث (الاستدلال غير الرسمي) كحد أدنى، أي أنهم تجاوزن المستويات الأول والثاني والثالث.

وفي المستوى الرابع (الاستدلال الرسمي) كان عدد الطالبات المصنفات في الاختبار القبلي طالبة واحدة، ولا يوجد أي طالبة مصنفة على هذا المستوى في الاختبار البعدي، وهي التي أجابت عن (3) أسئلة من (5) أسئلة من أسئلة المستوى الرابع (الاستدلال الرسمي) كحد أدنى، أي أنه لا يوجد إلا طالبة واحدة فقط في الاختبار القبلي تجاوزت المستويات الأول والثاني والثالث والرابع.

وفي المستوى الخامس (الصرامة) لا يوجد أي طالبة مصنفة على هذا المستوى في الاختبار القبلي، مقابل (8) طالبات صنفن على المستوى الخامس (الصرامة) في الاختبار البعدي، وهن الطالبات اللاتي أجبن عن (3) أسئلة من (5) أسئلة من المستوى

جدول (7)

تصنيف كوهين (Cohen, 2013)

قيمة معامل كرامر	0.1	0.3	0.5
حجم الأثر	صغير	وسط	كبير

ويتفق ذلك مع دراسة العنزي (2019)، وفي ضوء النظرية البنائية الاجتماعية ليفيجوتسكي، فإن الالتزام بالتدرج في مستويات التفكير يَكُون لغة مشتركة بين المعلم وطلابه، وأيضًا فإن التعلم في سياق اجتماعي والدعم من الزميلات أثناء أداء الأنشطة من شأنه أن يُسهم في تنمية التفكير الهندسي.

كما أن بناء الأنشطة ارتكز على الطالبة بشكل أساس؛ فهي من تبذل جهودها في إدراك المفهوم، واكتشاف خصائصه، واستخدامه لتكوين العلاقات بين المفاهيم، وتبرير العلاقات بينها وتفسيرها، وكتابة التخمينات، وبناء البراهين الهندسية بالاعتماد على المسلمات والنظريات، وإدراك الاختلافات بين الأنظمة الهندسية باستخدام الأدوات المتاحة، وبالتعاون مع زميلاتها، وبالحوار والمناقشة. وهذا يتفق مع دراسة أبو مغيص (2020)

أيضا يمكن تفسير هذه النتيجة من منظور النظرية البنائية؛ فمشاركة الطالبة في اكتشاف المفاهيم والتعميمات وإثبات النظريات، وكون المعلمة ميسرة فقط بنى لدى الطالبة خبرات جديدة في الهندسة غير الإقليدية، وربطها بخبراتها السابقة في الهندسة الإقليدية من خلال عمليتي التمثيل والمواءمة.

وتتفق هذه النتائج مع دراسة بلير (Blair, 2004) التي توصلت إلى أن دراسة الهندسة غير الإقليدية تعزز فهم الطلاب للهندسة الإقليدية، وأن التفكير الهندسي للطلاب في الهندسة الإقليدية يمكن أن يتوسع في الهندسات الأخرى. وكذلك البرنامج الذي قدمه دامك (Damcke et al, 2008) للمعلمين، أفادوا فيه بأن دراسة الهندسة الكروية وهندسة سيارة الأجرة وفر فهم أفضل لدور المعارف واللامعارف في الهندسة. ودراسة بروم وشوماكر (Brum & Schuhmacher, 2014) التي أظهرت تمكن معظم الطلاب من استيعاب وتمييز مفاهيم الهندسة الإقليدية والكروية والزائدية والتوفيق بينها، ولكن نظرًا لأن الموضوع لا يزال جديدًا في التعليم العام؛

مناقشة نتائج البحث وتفسيرها

أظهرت النتائج وجود فرق دال إحصائيًا عند مستوى الدلالة ( $\alpha < 0,05$ )، بين تكرارات عينة البحث في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الهندسي لصالح الاختبار البعدي، وأن هناك حجم أثر كبير لتدريس الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي لطالبات الصف الثاني الثانوي.

وقد تُعزى هذه النتيجة إلى أن محتوى الوحدات قد وفر السياق المناسب الذي تتعرف فيه الطالبة على نظام جديد مختلف تمامًا عن هندسة المرحلة الثانوية، وكون الهندسة التي درستها الطالبة خلال مراحل تعليمها تتبع نظامًا واحدًا؛ فقد لا تتضح المقارنة ولا دور المسلمات في النظام إلا بعد التعرض لنظام آخر. وفي أثناء تدريس الهندسة غير الإقليدية اتضح للطالبات أن الإثبات ضروري للتحقق من صحة التخمين؛ وذلك لأن بعض النظريات في الهندستين الكروية والأجرة ليست واضحة بشكل حدسي كما في الهندسة الإقليدية، كما اكتشفت الطالبات أن صحة الحجة لا تتحدد على أساس "صحة" أو "خطأ" المقدمات، ولكن تعتمد على التطبيق الصحيح لقوانين المنطق على هذه المقدمات. وتتفق هذه النتيجة مع دراسة المعافا (2022) في بعض جوانبها.

كما تُعزى النتيجة لتصميم الوحدة باستخدام النموذج المقترح من فان هيل، والالتزام بالتدرج في مستويات التفكير الهندسي لفان هيل عند بناء الأنشطة، وهذا يتفق مع دراسة (التوبية، 2015)، كما أن استخدام مراحل التفكير الهندسي لفان هيل التي تتيح استخدام الطالبة للأدوات اللازمة في مرحلتها العرض الحر والعرض الموجه يوفر دعمًا للتعلم؛

لتقديم تصور دقيق للموقف. وتتفق هذه النتيجة مع نتائج دراسة واسرمان (Wasserman, 2009). كما تتفق نتائج البحث الحالي مع دراسة نجيرشي وبانسيلال (Ngirishi & Bansilal, 2019) في أن معظم المتعلمين كانوا يعملون على المستويين الأول والثاني لمستويات فان هيل.

أيضا توصل البحث إلى وجود أثر إيجابي لتدريس الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي في المستوى الثالث؛ حيث انتقلت عدد من الطالبات من مستوى التحليل إلى مستوى الاستدلال غير الرسمي، ويمكن عزو هذه النتيجة إلى تعرض الطالبات لكثير من فرص العمل مع الأشكال الهندسية من خلال الاستدلال العملي، فعلى سبيل المثال: عند التعرف على مجموع قياسات زوايا المثلث في الهندسة الكروية، أو التعرف على الشكل الجديد للدائرة في هندسة سيارة الأجرة، والتأكيد على حالات دمج شكل أو مجموعة أو فئة من الأشكال ضمن مجموعة أخرى أكبر، والمقارنة المستمرة بين الأنظمة الهندسية.

ويمتد الأثر الإيجابي للوحدات المقترحة في الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي في المستوى الرابع؛ فالطالبات المصنفات على المستوى الخامس تجاوزن بالضرورة المستوى الرابع الذي تتمكن فيه الطالبة من كتابة البرهان، وتستطيع رؤية العلاقات بين النظريات والمسلمات، وقد يعزى ذلك للتنوع في طرائق البرهان ومستوياته في الوحدات؛ فالوحدات تضمنت استدلالات عملية ومجردة، كما أن البرهان في مرحلة العرض الموجه كان يتم بواسطة عدد من الإرشادات، بعدها تستطيع الطالبة كتابة برهان كامل في مرحلة العرض الحر.

وفي الاختبار البعدي كانت التكرارات تتركز في المستويات الثاني والثالث والخامس، ولا يوجد أي طالبة مصنفة على المستوى الرابع، وكونهن توقفن عند المستوى الثالث فهن قادرات على تحليل خصائص الأشكال وفهم العلاقات بينها، ومتابعة جميع الحجج

فمازال هناك طلاب في موقع إقليدي فيما يتعلق بالمشكلة غير الإقليدية.

وبخصوص تطور مستوى التفكير الهندسي للطالبات حسب المستويات؛ فيوجد أثر إيجابي لتدريس الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي في المستوى الأول؛ حيث تم انتقال عدد من الطالبات من المستوى الصفري إلى المستوى البصري، وتُعزى هذه النتيجة إلى استخدام الأدوات والمحسوسات أثناء تدريس الوحدات المقترحة، كالبرامج التفاعلية والرسم على كرات الفلين وغيره؛ مما أدى إلى إدراك الطالبة للأشكال الهندسية من خلال مظهرها. وهذا يتفق مع دراسات كل من السلولي والدرواني (2017)، والبوسعيدي (2020).

كما يوجد أثر إيجابي لتدريس الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي في المستوى الثاني؛ حيث انتقلت عدد من الطالبات من مستوى التحليل إلى المستويات اللاحقة، ويُعزى ذلك إلى مرور الطالبات بمرحلة التفسير في الاستراتيجية المستخدمة في الوحدات؛ حيث أتاحت للطالبات فرصة لصياغة المفاهيم ومناقشة الأفكار. كما أن إتاحة الفرصة لاكتشاف الخصائص بأنفسهن كما في مرحلة العرض الموجه، وعدم إخبارهن بها من قبل المعلمة مباشرة قد طوّر لديهن القدرة على تحليل الأشكال الهندسية إلى مكوناتها وإيجاد العلاقة بينها.

وقد يكون للتمثيلات المختلفة للشكل دور في فهم المفاهيم والتعميمات الجديدة، كالتمثيلات اللفظية، ورسم الشكل يدوياً، والصور والمجسمات، أو الرسم باستخدام البرامج التفاعلية. وكذلك الأنشطة من واقع الطالبة التي تُمثل الهندسة الكروية وهندسة سيارة الأجرة التي تراها الطالبة وتستخدمها في حياتها اليومية. وقد يكون للوحدات دور في إدراك المفاهيم الإقليدية؛ لأنه عند دراسة الهندسة غير الإقليدية تتعلم الطالبات أن الرسوم البيانية هي وسائل مساعدة في الإدراك ولا يمكن الاعتماد عليها دائماً



النظام الجديد، ويمكن تفسير هذا التطور في ضوء نظرية الاستعارات لسفارد (1994)؛ فالاستعارة هي التي تولد الفهم الرياضي المجرد (Junius, 2008). فعلى سبيل المثال: الاستعارة تُنشئ مفهوم "الدائرة العظمى" في الهندسة الكروية من مفهوم "الخط المستقيم" في هندسة إقليدس، فمن خلال تخيل الطالبة أنه بإمكانها "السير على الكرة بخط مستقيم" تتعرف على مفهوم الدائرة العظمى. والاستراتيجية المستخدمة في التدريس كانت تسمح للطالبات بالتفكير والتعبير عن أفكارهن باستخدام الاستعارات الخاصة بهن، ومن تجاربهن الشخصية لفهم الأفكار، لتجنب تكوين مفاهيم خاطئة بدلاً عن الفهم.

كما يمكن تفسير النتائج بعامة في أن استدعاء الطالبات للخيال في دراسة الهندسة غير الإقليدية حين التعرض لخطوط تبدو متوازنة على الكرة، ولكنها ستلتقي في نقطة بعيدة للغاية؛ يمكن أن يجعل الطالبات يفكرن أبعد من الأشكال المرسومة، مما يساعدهن في تحقيق قفزات مفاهيمية كبيرة، ويعملن على مستوى عالٍ من التجريد.

#### التوصيات

في ضوء النتائج التي توصل إليها البحث؛ فيوصي الباحثان بما يلي:

- 1) تضمين الوحدات المقترحة في مناهج الرياضيات المدرسية لفاعليتها في تنمية التفكير الهندسي.
- 2) تضمين أنشطة متعددة في الهندسة غير الإقليدية في محتوى مقرر الرياضيات في المرحلة الثانوية.
- 3) التركيز على البرهان الرياضي في المحتوى والتدريس، وتطوير طرائق عرضه في الكتب المدرسية للطلاب.

#### المقترحات

يقترح البحث إجراء الدراسات الآتية:

- دراسة أثر وحدات في الهندسة غير الإقليدية في تنمية المفاهيم الهندسية لطلاب المرحلة الثانوية (ذكور وإناث).

والتبريرات المنطقية، ولكنهم لم يتمكنوا من بناء برهان جديد. في حين أنه في الاختبار القبلي لم يصل لهذا المستوى إلا طالبة واحدة؛ مما يؤكد أن لغة البرهان بالأساس ضعيفة لدى الطالبات.

وهناك حوالي (12) حالة استوفت فيها الطالبات متطلبات مستوى أعلى بعد أن فشلن في تلبية متطلبات المستويات الأدنى، هذه الحالات ليست قليلة بحيث يمكن إهمالها، ونسبتها للتخمين، فعلى سبيل المثال (4) طالبات أجبن على (3) أسئلة من (5) أسئلة في المستوى الخامس، ولكن لم يجتزن الرابع؛ لذا لا يُصنفن على الخامس، وإنما يُصنفن على المستوى الثالث. وتتفق هذه النتيجة مع نتائج دراسة نجيريشي وبانسيلال (Ngirishi & Bansilal, 2019) في أن الطلاب يعانون من استخدام التفكير الاستنتاجي الرسمي وإنشاء البراهين. وتتفق أيضاً مع نتائج دراسة السلولي والدرواني (2017) في أن حجم الأثر كان ضعيفاً لدى الطلاب في مستوى الاستدلال.

وقد يكون الضعف في الخبرات السابقة للطالبات في الهندسة الإقليدية، وفي البرهان الرياضي بعامة، وكون الطالبات لا يفضلنه رغم إحساسهن بأهميته؛ هو الذي أدى إلى تقييد وصول بعض الطالبات إلى المستوى الرابع من مستويات التفكير الهندسي، ويؤكد ذلك نجيريشي وبانسيلال وينسبان (Ngirishi & Bansilal, 2019) كون المشكلات التي يواجهها الطلاب في الإثبات يعود إلى أن البراهين تُقدّم في الكتب المدرسية كمنتجات نهائية، وهذا لا يتحدى تفكير الطلاب بشكل استنتاجي.

وأيضاً يمتد الأثر الإيجابي للوحدات المقترحة في تنمية التفكير الهندسي في المستوى الخامس. وتُعزى هذه النتيجة إلى تعرض الطالبات في الوحدات لأنظمة هندسية مختلفة عن النظام الإقليدي الذي تعلمنه سابقاً؛ مما أتاح لهن المقارنة بين المفاهيم والتعميمات عند كل فكرة جديدة، والالتزام بتعريف المفهوم نفسه في الهندسة الجديدة مع إمكانية تغير الخواص بحسب

العطاس، أحمد. (2015). دلالات الصديق والثبات لاختبار مستويات التفكير الهندسي في ضوء نموذج (فان هيل) لطلاب الصف الثاني ثانوي في مدينة مكة المكرمة. رسالة ماجستير غير منشورة. جامعة أم القرى.

العززي، هلال. (2019). أثر استراتيجيات السقالات التعليمية في تنمية التحصيل الرياضي والتفكير الهندسي ودافعية التعلم لطلاب الصف الثاني المتوسط. مجلة جامعة أم القرى للعلوم التربوية والنفسية. 11(1). 33-1.

مركز التميز البحثي. (1436). الدراسة التقييمية لمشروع تطوير الرياضيات والعلوم الطبيعية في التعليم العام بالمملكة العربية السعودية.

المعافا، إبراهيم. (2022). فاعلية مقرر مقترح في الهندسة الكسورية وبرمجياتها في تنمية مهارات القرن الحادي والعشرين والتفكير الهندسي لدى طلبة قسم الرياضيات بكلية التربية-جامعة صنعاء. رسالة دكتوراه غير منشورة. جامعة الملك سعود.

النذير، محمد. (2020). فلسفة تعليم الرياضيات منظور ابستمولوجي. طيف إدراك.

هيئة تقويم التعليم والتدريب. (2020). الإطار التخصصي لمجال تعلم الرياضيات.

<https://etec.gov.sa/ar/productsandservices/>

[NCSEE/Cevaluation/Pages/Standardsdocuments.aspx](https://etec.gov.sa/ar/productsandservices/NCSEE/Cevaluation/Pages/Standardsdocuments.aspx)

nts.aspx

### المراجع الأجنبية

Abū 'Umayrah, maḥabbāt. (2000). *Ta'lim al-riyādīyāt bayna al-nazarīyah wa-al-taṭbīq*. Maktabat al-Dār al-'Arabīyah lil-Kitāb.

al-'Anzī, Hilāl. (2019). *Athar istirātījīyah alsqālāt al-ta'limīyah fī Tanmiyat al-taḥṣīl al-riyādī wa-al-tafkīr al-Handasī wdāf' yh al-ta'allum li-tullāb al-ṣaff al-Thānī al-Mutawassīṭ*. Majallat Jāmi'at Umm al-Qurā lil-'Ulūm al-Tarbawīyah wa-al-naḥwīyah. 11(1). 1-33.

al-'Aṭṭās, Aḥmad. (2015). *dalālāt al-ṣidq wa-al-thabāt lākhtbār mustawayāt al-tafkīr al-Handasī fī daw' namūdhaj (Fān Hayl) li-tullāb al-ṣaff al-Thānī thānawī fī Madīnat Makkah al-Mukarramah*. Risālat mājistīr ghayr anshūrah. Jāmi'at Umm al-Qurā.

Aldārwny, bkyl. wāslwly, Musfir. (2016). *Athar tadrīs alqtw' almkrwtyh bi-istikhdām brmjyāt al-Handasah al-dīnāmīkīyah fī Tanmiyat al-taḥṣīl wa-al-tafkīr al-Handasī ladā tullāb al-marḥalah al-thānawīyah*. Majallat al-'Ulūm al-Tarbawīyah. 2(1). 118-138.

- دراسة أثر وحدات هندسية أخرى في الهندسة غير الإقليدية على تنمية التفكير الهندسي لطلاب المرحلة الثانوية أو الطلاب الموهوبين (ذكور وإناث).

- دراسة أثر وحدات في الهندسة غير الإقليدية في تنمية التفكير الهندسي لطلاب المرحلة المتوسطة (ذكور وإناث).

\*\*\*\*

### المراجع العربية

أبو عميرة، محبات. (2000). تعليم الرياضيات بين النظرية والتطبيق. مكتبة الدار العربية للكتاب.

أبو مغيص، نور. (2020). أثر توظيف استراتيجيات التعلم النشط في تنمية المفاهيم ومهارات التفكير الهندسي لدى طالبات الصف التاسع الأساسي بغزة. رسالة ماجستير غير منشورة. الجامعة الإسلامية بغزة.

التوبية، رابعة. (2015). فاعلية استخدام التدريس المعلمي في تنمية التحصيل والتفكير الهندسي لدى طالبات الصف السادس الأساسي. رسالة ماجستير غير منشورة. جامعة السلطان قابوس.

الجهني، عايشة. (2016). العلاقة بين مستوى التفكير الهندسي ومستوى القدرة المكانية لدى طالبات المرحلة الثانوية بالمدينة المنورة. *المجلة العربية للعلوم ونشر الأبحاث*. 6(2). 64-85.

خضر، أميرة. (2019). فاعلية التعليم المتميز في تدريس الرياضيات لتنمية بعض مهارات التفكير الهندسي لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية. *مجلة تربويات الرياضيات*. 22(9). 198-217.

الدرواني بكي، والسلولي، مسفر. (2017). أثر تدريس القواطع المخروطية باستخدام برمجيات الهندسة الديناميكية في تنمية التحصيل والتفكير الهندسي لدى طلاب المرحلة الثانوية. *مجلة العلوم التربوية*. 2(1). 118-138.

شحاتة، حسن؛ النجار، زينب. (2003). معجم المصطلحات التربوية والنفسية. الدار المصرية اللبنانية.

العتيبي، محمد. (2019). تقويم كتب الرياضيات بالمرحلة المتوسطة في المملكة العربية السعودية في ضوء نموذج فان هيل للتفكير الهندسي. *مجلة العلوم التربوية والنفسية*. 3(6). 46-72.

- Matematica a Partir de Uma Sequencia Didatica. *Holos, I*, 258-281.
- Bū mghyṣb, Nūr. (2020). *Athar Tawzīf Istirāṭijīyāt al-ta'allum alnshṭ fī Tanmiyat al-mafāhīm wa-mahārāt al-tafkīr al-Handasī ladā ṭālibāt al-ṣaff al-tāsi' al-asāsī bi-Ghazzah*. Risālat mājistīr ghayr manshūrah. al-Jāmi'ah al-Islāmīyah bi-Ghazzah.
- Buda, J. (2017). *Integrating Non-Euclidean Geometry into High School*. Honors Thesis. Loyola Marymount University.
- Carvalho, M & Tucci, A. (2011, June 26-30). *O ensino de geometria não euclidiana na educação básica, Thirteenth American Congress of Mathematics Education*. Brazil.
- Cohen, J. (2013). *Statistical power analysis for the behavioral sciences*. Academic press.
- Common Core State Standards Initiative: CCSS. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.
- Damcke, D., Dray, T., Fung, M., Hart, D., & Riverstone, L. (2008). Using non-Euclidean Geometry to teach Euclidean Geometry to K–12 teachers. *Educational Research and Reviews*, 8(16), 1421-1436.
- DO PARANÁ, G. O. V. E. R. N. O. (2008). *Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática*.
- Fish, W. (1996). *Non-Euclidean Geometry and Its Possible Role in The Secondary School Mathematics Syllabus*. Master Thesis. University of South Africa.
- Hay'at Taqwīm al-Ta'līm wa-al-Tadrīb. (2020). *al-iṭār alkhṣṣy lmjāl ta'allum al-riyāḍīyāt*. <https://etec.gov.sa/ar/productsandservices/NCSEE/Cevaluation/Pages/Standardsdocuments.aspx>
- Hisham Barakat Hussein, H. (2017). The Efficacy of Dynamic Geometry Software (Cabri-3D) in Teaching Spatial Geometry at High School on Geometrical Thinking and Attitude towards Mathematics. *Journal of the College of Basic Education for Educational and Human Sciences at the University of Babylon* 31.169-195.
- International Association for the Evaluation of Educational Achievement [IEA], (2019). *TIMSS2019 International Results in Mathematics*. <https://timss2019.org/reports/>
- Jones, Keith. (2002). *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on*
- Alghamdi, I. (2015). The Effectiveness of Using Blended Learning in Teaching Geometry on Achievement and Developing Geometrical Thinking With Second Intermediate Graders. *Journal of Educational Sciences*. 27(2). 177-202.
- al-Juhanī, 'Āyishah. (2016). al-'alāqah bayna mustawā al-tafkīr al-Handasī wa-mustawā al-qudrah al-makānīyah ladā ṭālibāt al-marḥalah al-thānawīyah bi-al-Madīnah al-Munawwarah. *al-Majallah al-'Arabīyah lil-'Ulūm wa-nashr al-Abḥāth*. 2(6). 64-85.
- al-Nadhīr, Muḥammad. (2020). *Falsafat Ta'līm al-riyāḍīyāt manzūr abstmwlwly*. Ṭayf idrāk.
- Altwbyh, Rābi'ah. (2015). *fā'ilīyat istikhdām al-tadrīs alm'mly fī Tanmiyat al-taḥṣīl wa-al-tafkīr al-Handasī ladā ṭālibāt al-ṣaff al-sādis al-asāsī*. Risālat mājistīr ghayr manshūrah. Jāmi'at al-Sulṭān Qābūs.
- al-'Utaybī, Muḥammad. (2019). Taqwīm kutub al-riyāḍīyāt bi-al-marḥalah al-mutawassīṭah fī al-Mamlakah al-'Arabīyah al-Sa'ūdīyah fī ḍaw' namūdhaj Fān Hayl lil-tafkīr al-Handasī. *Majallat al-'Ulūm al-Tarbawīyah wa-al-nafsīyah*. 3(6). 46-72.
- Al-Zahrani, G. (2021). *Effectiveness of Using Divergent Thinking Strategies in Developing Academic Achievement and Geometrical Thinking for Middle School Students*. Unpublished master's thesis. King Saud University.
- Ambrozi, L. & Glowacki, J. & Sauer, L. (2015). Explorando Conceitos de Geometria nao Euclidiana. *Scientia Cum Industria*, 3(3). 130-133.
- Andrade, M. (2011). *Geometria Spherical: Uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico*. Master Thesis. Pontifical Catholic University.
- Athanasio, T. (2019). *Geometria Esférica: Uma proposta de introdução no Ensino Médio a partir da geometria na esfera*. Master Thesis. University Sao Paulo.
- Beam, J. & Belnap, J. & Kuennen, E. & Parrott, A. & Seaman, C. & Szydlik, J. (2017). *Big Ideas in Euclidean and Non-Euclidean Geometries*.
- Blair, S. (2004). *Describing undergraduates' reasoning within and across Euclidean, taxicab, and spherical geometries*. Portland State University.
- Brum, W., & Schuhmacher, E. (2014). Uma Abordagem de Conceitos Elementares de Geometria Nao Euclidiana: Uma Experiencia Vivenciada no Ensino de

- Usiskin,Z.(1982).*Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*.
- van Hiele, M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play.*Teaching Children Mathematics* 6, 310–16.
- Wasserman,K. (2009).*Using non-Euclidean geometry in the Euclidean classroom*.
- practice, *Issues in the teaching and learning of geometry*. (pp.121--139, Chapter 8). Routledge.
- Junius,P.(2008).A case example of insect gymnastics: how is non-Euclidean geometry learned?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(8), 987-1002.
- Khiḍr. Amīrah. (2019). fā‘ilīyat al-Ta‘līm almtmāyz fī tadrīs al-riyāḍīyāt li-Tanmiyat ba‘ḍ mahārāt al-tafkīr al-Handasī ladā talāmīdh al-marḥalah al-i‘dāḍīyah.*Majallat trbwyāt al-riyāḍīyāt*.22(9).198-217.
- Lovis, K., & Franco,V.S.(2015).Concepts of non-Euclidean Geometries of a Group of Math Teachers from Primary Schools. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 369-388.
- Markaz al-Tamyīz al-baḥthī.(1436).*al-dirāsah altqwmyh li-mashrū‘ taḥwīr al-riyāḍīyāt wa-al-‘Ulūm al-ṭabī‘īyah fī al-Ta‘līm al-‘āmm bi-al-Mamlakah al-‘Arabīyah al-Sa‘ūdīyah*.
- Mateya, M. (2008). Using the van Hiele theory to analyse geometrical conceptualisation in grade 12 students: A Namibian perspective. Doctoral dissertation, Rhodes University.
- Ministry of Education of Peoples Republic of China. (2003). *Ordinary Senior Secondary-Mathematics Curriculum Standards*.University of Macau, China.
- Moghrabi.(2018).Level of Spatial ability and geometrical thinking among th10 grade students in the light of gender and level of achievement Variables.*Al- Quds Open University*.10(27).175-192.
- National Council of Teachers Mathematics (NCTM)(1989).*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers Mathematics (NCTM)(2000). *Principles and Standard for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM. (2020). *NCTM Standards for Secondary Mathematics Teacher Preparation*.
- Ngirishi,H.,& Bansilal,S.(2019).An exploration of high school learners’ understanding of geometric concepts.*Problems of Education in the 21st Century*,77(1),82.
- Shihātah, Ḥasan; al-Najjār, Zaynab .(2003). Mu‘jam al-muṣṭalahāt al-Tarbawīyah wa-al-nafsīyah. *al-Dār al-Miṣrīyah al-Lubnānīyah*.*The International Commission on Mathematical Instruction [ICMI]*. (1997).